SUPERFICIES DE RIEMANN BASS, FUNCION DE GREEN Y EXTENSION HOLOMORFA

José Manuel Rodríguez García

Director de tesis:
José Luis Fernández Pérez.

Memoria presentada para aspirar al grado de doctor en Ciencias Matemáticas.

Departamento de Matemáticas.
Universidad Autónoma de Madrid.

Cantoblanco, mayo de 1991.

A mi familia,
a quienes nunca podré
agradecer lo suficiente
todo lo que han hecho
por Ana y por mí.

Quiero agradecer a mi director de tesis, José Luis Fernández, el interés, el esfuerzo y el tiempo que me ha dedicado, así como el encontrar siempre en él una mano tendida y dispuesta a ayudarme en todo lo que fuera necesario.

También quiero agradecer a Jesús Begoña, que fue mi profesor en C.O.U., y a todo el Departamento de Matemáticas, en especial a Antonio Córdoba, lo mucho que han colaborado en mi formación en estos últimos años en los que las matemáticas han sido una parte esencial de mi vida.

Deseo dar las gracias también, a todos los amigos que me han acompañado y ayudado, y sobre todo a Ana, que ha tenido el coraje de leerse la tesis varias veces para ayudarme a realizar las correcciones.

INDICE

INTRODUCCION

En este trabajo se profundiza en uno de los tópicos más clásicos en la teoría del análisis complejo de una variable: la clasificación de las superficies de Riemann. El estudio sobre la teoría de la clasificación se realiza desde tres puntos de vista distintos, cada uno de los cuales constituye un capítulo.

Antes de comenzar a hablar de los resultados conseguidos, sería interesante exponer con algún detalle lo que va a ser la herramienta fundamental en el desarrollo posterior: la métrica hiperbólica o de Poincaré. Esto va a hacer que, en general, se adopten puntos de vista de geometría Riemanniana.

Si S es una superficie de Riemann cualquiera (una variedad bidimensional con un atlas con cambios de carta analíticos) y $\pi : \tilde{S} \longrightarrow S$ es su recubrimiento universal, llamamos Γ al grupo de transformaciones recubridoras, es decir, el grupo de las funciones $\gamma : \tilde{S} \longrightarrow \tilde{S}$ biholomorfas y tales que $\pi \circ \gamma = \pi$. El grupo Γ opera sin puntos fijos y discontinuamente sobre $\tilde{S}$ y de hecho se tiene que S es conformemente equivalente con $\tilde{S}/\Gamma$. Recíprocamente, dado cualquier grupo Γ de transformaciones biholomorfas de $\tilde{S}$ en sí mismo que actúen discontinuamente y sin puntos fijos, $\tilde{S}/\Gamma$ es una superficie de Riemann. Un tal grupo Γ se denomina grupo Fuchsiano si $\tilde{S} = \Delta$.

Antes de continuar, conviene precisar los términos de función analítica y holomorfa. Se dice que $f : \Omega \subset \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ es una aplicación analítica si admite un desarrollo en serie de potencias con radio de convergencia positivo.

Si S, R son dos superficies de Riemann, se dice que $f : S \longrightarrow R$ es holomorfa si su expresión en cartas locales es analítica. Se denota la clase de funciones holomorfas de S en R por $H(S, R)$.

El teorema de uniformización dice que cualquier superficie de Riemann simplemente conexa es conformenente equivalente a la esfera de Riemann $\hat{\mathbf{C}}$, al plano complejo $\mathbf{C}$ o al disco unidad Δ. Por tanto, sólo hay tres posibilidades para $\tilde{S}$, módulo equivalencia conforme.

Si $\tilde{S} = \hat{\mathbf{C}}$, entonces S ha de ser necesariamente $\hat{\mathbf{C}}$, ya que $\hat{\mathbf{C}}$ sólo puede ser espacio recubridor de sí mismo.

Si $\tilde{S} = \mathbf{C}$, las transformaciones recubridoras han de ser necesariamente de la forma $\gamma(z) = z + a$ para que no haya punto fijo en $\mathbf{C}$; como además el grupo debe actuar discontinuamente, Γ ha de ser o bien el grupo trivial o bien tener uno o dos generadores: así S puede ser conformemente equivalente a $\mathbf{C}$, $\mathbf{C} - \{0\}$ o a un toro $\mathbf{T}$, respectivamente (hay toda una variedad unidimensional compleja de toros, no conformemente equivalentes entre sí).

A estas superficies que no tienen como recubridor universal al disco Δ las llamamos excepcionales. Todas las demás, a las que llamaremos hiperbólicas o no excepcionales, tienen al disco como recubridor.

Se cuenta que Poincaré, cuando iba a subir al tranvía que le llevaría a una excursión geológica, descubrió que las aplicaciones de Möbius que preservan Δ son exactamente las isometrías del disco si le dotamos de la métrica

$$ds^2 = \frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-|z|^2)^2} \quad \text{ó} \quad ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}. \tag{0.1}$$

Aquí por isometrías no sólo se entiende que se conservan distancias sino también orientaciones. Este grupo de isometrías, al que se denota por $M\ddot{o}b(\Delta)$, es el conjunto de transformaciones

$$M\ddot{o}b(\Delta) \equiv \left\{ T : \Delta \to \Delta \quad \text{tal que} \quad T(z) = e^{i\theta}\frac{z+a}{1+\bar{a}z} \quad \text{con } a \in \Delta \text{ y } \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

El disco con esta métrica constituye el modelo de Poincaré de la geometría hiperbólica, en el que las geodésicas son los arcos de circunferencia perpendiculares a $\partial\Delta$, y que tiene curvatura constante $K = -1$. Este es el motivo de que aparezcan el 4 y el 2 en (0.1); si no estuviesen, la curvatura sería -4.

Otro modelo, conforme e isométricamente equivalente a éste, es el semiplano superior U con la métrica

$$ds = \frac{|dz|}{y}.$$

Se usarán ambos indistintamente, aunque por el teorema de la aplicación de Riemann, cualquier simplemente conexo Ω contenido propiamente en el plano, es equivalente a éstos con la métrica conforme cuya densidad verifica $\lambda_\Omega(f(z))|f'(z)| = \lambda_\Delta(z)$, donde $f : \Delta \to \Omega$ es una aplicación biholomorfa.

También se usará como modelo en una ocasión (para probar el lema 1.1 del capítulo I) la banda $B \equiv \{0 < Im\, z < 1\}$, con su métrica de densidad $\lambda_B(z) = \pi/sen(\pi y)$.

Dada cualquier superficie S no excepcional, si $\pi : \Delta \to S$ es un recubrimiento universal de S y $\gamma \in M\ddot{o}b(\Delta)$, entonces $\pi \circ \gamma : \Delta \to S$ es también un recubrimiento universal, y así se obienen todos los posibles. Por tanto, al elegir un recubrimiento universal, se pueden prefijar $\pi(0)$ y el argumento de $\pi'(0)$.

Como S es conformemente equivalente a Δ/Γ, donde Γ es el grupo de transformaciones recubridoras de un recubrimiento universal, los grupos Γ que podemos elegir para realizar tal representación son únicos salvo conjugación por un elemento de $M\ddot{o}b(\Delta)$. Como Γ es un grupo de isometrías para la métrica hiperbólica de Δ, puede proyectarse dicha métrica mediante π, de forma que se dota a $S \equiv \Delta/\Gamma$ de una métrica Riemanniana conforme, completa y con curvatura $K = -1$. Esta métrica está bien definida, ya que Γ es único salvo conjugación por una isometría de Δ, y además es la única que verifica las propiedades anteriores. También es fácil ver que λ_S es una función analítica real en cada carta.

Constituye un abuso de lenguaje el decir que la métrica de Poincaré es una métrica conforme, ya que la propiedad de conformalidad (conservar ángulos y orientaciones), es una relación de equivalencia entre dos métricas. Al hablar de superficies de Riemann que están contenidas en el plano, que la métrica sea conforme significa que es conforme con la métrica euclídea. Si trabajamos con una superficie general S, que la métrica sea conforme quiere decir que cualquier recubrimiento universal π del disco (con su métrica euclídea o hiperbólica) sobre S (con su métrica hiperbólica), es una aplicación conforme (observemos que esto es una tautología ya que π es una isometría local), o lo que es lo mismo, que cualquier carta local de S es una aplicación conforme sobre el plano con su métrica euclídea, ya que π es holomorfa. Por tanto, cualquier aplicación holomorfa es conforme con respecto a las métricas hiperbólicas (o a las euclídeas en cada carta), si la diferencial en el punto considerado es distinta de cero.

Conviene destacar un hecho importante acerca de la unicidad de la métrica de Poincaré: dada una variedad bidimensional orientable M, existen infinitas estructuras de superficie de Riemann para M incompatibles (no conformes) entre sí, y para cada una de ellas existe una métrica de Poincaré. La elección de estructura de superficie de Riemann (un atlas analítico) es equivalente a la elección de una clase de métricas conformes en la variedad.

Obsérvese que cualquier variedad Riemanniana bidimensional orientable puede ser dotada de un atlas analítico de forma que su métrica sea conforme con la euclídea en cada carta; considerando como cartas las coordenadas isotermales y todas las que sean conformes con ellas.

La idea de la demostración de un hecho tan sorprendente como la unicidad de la métrica de Poincaré, es muy sencilla:

Si tenemos dos métricas completas g_1, g_2 en S, de curvatura -1 y conformes entre sí, el hecho de que tengan la misma curvatura constante hace que, dados dos puntos cualesquiera p, q de S, exista una isometría local entre dos entornos V de p y W de q, $f : (V, g_1) \to (W, g_2)$ (basta considerar las coordenadas geodésicas exponenciales). Al ser completas las métricas, f puede elevarse a los recubridores universales, prolongando la aplicación a lo largo de las geodésicas.

Por tanto, basta con probar que si $h : (\Delta, g_\Delta) \to (\Delta, g)$ es una isometría global, donde g_Δ es la métrica hiperbólica de Δ y g es una métrica conforme con la euclídea, entonces $g = g_\Delta$. Pero como h es un automorfismo conforme de Δ, h ha de ser una transformación de Möbius, y como las transformaciones de Möbius son isometrías para la métrica hiperbólica, se tiene que $g = g_\Delta$.

Si S es un dominio plano y $\pi : \Delta \to S$ es un recubrimiento universal, entonces las densidades de la métrica de Poincaré con respecto a la métrica euclídea en Δ y S verifican la relación

$$\lambda_S(\pi(z))|\pi'(z)| = \lambda_\Delta(z).$$

Conocer λ_S es pues tan complicado como conocer el recubrimiento universal, pero en algunos casos sencillos es posible hallar λ_S explícitamente:

(a) Si $S \equiv \{0 < |z-a| < R\}$, entonces

$$\lambda_S(z) = \frac{1}{|z-a| \, log \frac{R}{|z-a|}}.$$

(b) Si $S \equiv \{r < |z-a| < r\,m\}$, entonces

$$\lambda_S(z) = \frac{c}{|z-a| \, sen \left(c \, log \frac{|z-a|}{r}\right)}, \qquad \text{donde} \qquad c = \frac{\pi}{log\ m}.$$

En la mayor parte de los casos en los que S es un dominio contenido en $\mathbf{C}$, el cálculo explícito de λ_S es imposible, pero existen estimaciones muy buenas:

Una aplicación del lema de Schwarz implica que

$$\lambda_S(z) \le \frac{2}{d(z, \partial S)},$$

donde por d se entenderá de aquí en adelante la distancia euclídea.

El teorema 1/4 de Koebe permite deducir que

$$\lambda_S(z) \ge \frac{1}{2\,d(z, \partial S)},$$

en el caso de que S sea simplemente conexo. Entonces,

$$\lambda_S(z) \asymp d(z, \partial S)^{-1}$$

para los simplemente conexos. Esto es también cierto para una clase de dominios mucho más amplia, los llamados dominios modulados, que jugarán un importante papel en el capítulo I. Unas buenas estimaciones de λ_S para un dominio plano general fueron obtenidas por Beardon y Pommerenke [B-P]:

TEOREMA. **Para cualquier dominio plano $S \subset \mathbf{C}$ se tiene**

$$1/\sqrt{2} \le \lambda_S(z)\, d(z, \partial S)\, (k + \beta_S(z)) \le 2\,k + \pi/2, \qquad \textbf{para todo } z \in S,$$

donde

$$\beta_S(z) \equiv inf \left\{ \left| log \frac{|z-a|}{|b-a|} \right| \,:\, a, b \in \partial S,\ |z-a| = d(z, \partial S) \right\},$$

y $k \equiv 4 + log(3 + 2\sqrt{2})$.

La cota inferior se puede mejorar hasta conseguir

$$1 \le \lambda_S(z)\ d(z, \partial S)\ (4.76 + \beta_S(z)).$$

Esta métrica tiene un gran número de propiedades, aparte de las ya mencionadas. Si se denota, como se hará de ahora en adelante, por d_S la distancia inducida por la métrica de Poincaré en la superficie S, y si $f : \Delta \to \Delta$ es una aplicación holomorfa, entonces una reformulación del lema de Schwarz implica que

$$d_\Delta(f(z), f(w)) \leq d_\Delta(z, w) \qquad \text{para todo } z, w \in \Delta.$$

De hecho, se tiene una versión mucho más fuerte de este principio. Si $f : S \to R$ es una aplicación holomorfa, entonces

$$d_R(f(p), f(q)) \leq d_S(p, q) \qquad \text{para todo } p, q \in S,$$

es decir, todas las aplicaciones holomorfas son contractivas para la métrica hiperbólica.

En particular, si se toma como f la inclusión de S en R, donde S y R son dominios planos, se tiene que

$$\lambda_R(z) \leq \lambda_S(z) \qquad \text{para todo } z \in S.$$

Cómo puede usarse esta métrica para probar teoremas de variable compleja, se muestra con esta sencilla demostración del teorema pequeño de Picard:

Antes que nada, conviene establecer una notación que será muy usada: $\Delta(a, r)$ es el disco euclídeo de centro a y radio r, $\overline{\Delta}(a, r)$ es la clausura de $\Delta(a, r)$, $\Delta(a, r)^* = \Delta(a, r) - \{a\}$ y $\Delta_r = \Delta(0, r)$, por lo que $\Delta_1 = \Delta$.

Si $f : \mathbf{C} \to S$ es una aplicación holomorfa, donde S es una superficie de Riemann hiperbólica, entonces f es constante.

Dados $z, w \in \mathbf{C}$, si $N > |z|, |w|$, entonces

$$d_S(f(z), f(w)) \leq d_{\Delta_N}(z, w),$$

y el término de la derecha tiende a cero cuando N tiende a ∞.

Definida la métrica de Poincaré y enunciadas algunas de sus propiedades, se puede exponer ya el contenido de cada capítulo. Como se decía al principio de esta introducción, todos los capítulos pueden verse, desde un punto de vista general, como una profundización en el estudio de la clasificación de las superficies de Riemann.

Ahora se expondrán de una forma sucinta la mayor parte de los resultados que se prueban en el presente trabajo. Las definiciones, las fórmulas y las relaciones con otros conceptos afines, se desarrollan con más detalle en las introducciones de cada capítulo.

En el primer capítulo se estudia cuándo una superficie es **bass**, es decir, cuándo el menor autovalor $b(S)$ del laplaciano (con respecto a la métrica hiperbólica) es cero.

Un importante teorema de Elstrodt-Patterson-Sullivan [Sul2] da una fórmula explícita para $b(S)$ en función de $\delta(S)$, el exponente de convergencia de una serie de Poincaré asociada a S, que involucra la geometría y la topología de S. Otro teorema de Patterson y Sullivan [N2, p.159] establece la igualdad entre $\delta(S)$ y la dimensión de Hausdorff del conjunto límite cónico $C(\Gamma)$ asociado a cualquier grupo Γ que represente a S. Todos estos conceptos se definen y se desarrollan mucho más detalladamente en la introducción del capítulo I.

Además, existe una caracterización de superficies bass con fuerte sabor geométrico. Si A_S, L_S denotan respectivamente el área y la longitud en S respecto a su métrica de Poincaré, se define la constante isoperimétrica de S como

$$h(S) \equiv sup \frac{A_S(G)}{L_S(\partial G)},$$

donde el supremo se toma sobre todos los dominios G relativamente compactos en S y con frontera suave. Decimos que S satisface la **desigualdad isoperimétrica lineal** si $h(S) < \infty$, lo que implica que

$$A_S(G) \leq h(S)\, L_S(\partial G),$$

para todos los dominios anteriores G.

TEOREMA B. **Una superficie de Riemann S no es bass si y sólo si satisface la desigualdad isoperimétrica. Además, se tiene que**

$$\frac{1}{4} \leq b(S)h(S)^2 \qquad \text{y} \qquad b(S)h(S) \leq \frac{3}{2}.$$

Este resultado era ya conocido, pero la prueba que se da es nueva y se utiliza de forma esencial en la demostración del teorema A.

Todo esto muestra que $b(S)$ se relaciona con gran cantidad de objetos interesantes de la superficie.

La numeración usada en los resultados es la siguiente:

Los teoremas que constituyen el núcleo de esta tesis se distinguen por numerarse con letras en lugar de con números; por tanto se hablará de teorema A, teorema B, ...

Los teoremas que tienen nombre propio (teorema de Liouville, teorema de Picard, ...) y los que sólamente aparecen en la introducción, no llevan letras ni números.

El resto de los teoremas probados por otros matemáticos, así como todos los demás resultados que aquí se prueban, ya sean lemas, corolarios o proposiciones, se numeran con dos cifras, la primera de las cuales indica la sección (no el capítulo) en que aparecen por primera vez, y la segunda señala su orden dentro de la sección.

Cuando se haga alguna referencia a un resultado previo, se entenderá, a menos que se indique explícitamente otra cosa, que el resultado se encuentra en el mismo capítulo.

Desde Teichmüller, uno de los principales objetos de estudio en la teoría geométrica de funciones ha sido el comportamiento de los invariantes conformes de una superficie cuando ésta se deforma mediante aplicaciones cuasiconformes.

El primer resultado positivo que se consiguió, fue que la clase de las superficies de Riemann que no tienen función de Green (O_G) es cerrada bajo la aplicación de transformaciones cuasiconformes [Pf]. Aquí se prueba que lo mismo es cierto para la clase de superficies bass:

TEOREMA A. **Si una superficie de Riemann S_1 es bass y es cuasiconformemente equivalente a S_2, entonces S_2 es bass.**

El siguiente objetivo será estudiar qué dominios planos son bass.

Aquí se consiguen una condición necesaria y otra suficiente para que un dominio plano sea bass, y ambas condiciones están muy próximas. Estas condiciones vienen expresadas en los teoremas C y D.

Un dominio G de la esfera se denomina **modulado** si existe una cota superior para el módulo de todo dominio doblemente conexo $H \subset G$ que separa la frontera de G.

El **módulo** de un dominio $A_t \equiv \{t < |z| < 1\}$, con $t \in [0,1)$, se define como $\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{t}$. Si H es un dominio doblemente conexo, existe un $t \in [0,1)$ tal que H es conformemente equivalente a A_t, y definimos el módulo de H como el módulo de A_t. El módulo puede definirse de forma equivalente, sin usar de forma explícita las aplicaciones conformes, de la siguiente manera: el módulo de H es el cociente entre el número π y el ínfimo de las longitudes (respecto a la métrica de Poincaré de H) de todas las curvas cerradas que no son homótopas a cero en H. Esta caracterización se usará en la prueba del lema 2.1 del capítulo I.

La condición de que G sea modulado puede expresarse equivalentemente en términos de la métrica de Poincaré, diciendo que existe una constante positiva C, tal que la longitud respecto a la métrica de Poincaré (L_G) de cualquier curva cerrada contenida en G, está acotada inferiormente por C.

Los dominios modulados son objeto de estudio en la actualidad. María José González [G] ha probado el siguiente resultado:

TEOREMA. **Un dominio G de la esfera es modulado si y sólo si existe un dominio fundamental $\mathcal{F}$ tal que $\partial\mathcal{F}$ es un cuasicírculo.**

Si S es una superficie de Riemann que puede representarse como Δ/Γ, se dice que $\mathcal{F}$ es un **dominio fundamental** para Γ si $\mathcal{F}$ es un dominio cuya frontera tiene área cero, y si existe un subconjunto $\mathcal{H}$ de $\partial\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F} \cup \mathcal{H}$ contiene exactamente un punto de cada órbita de Γ en Δ. Un subconjunto de la esfera es un **cuasicírculo** si es la imagen de $\partial\Delta$ mediante una aplicación cuasiconforme de la esfera en sí misma.

La condición suficiente para que un dominio plano sea bass la da el siguiente teorema.

TEOREMA C. **Supongamos que G es modulado y que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión (finita o infinita) separada en la métrica hiperbólica de G, es decir, que verifica**

$$\inf_{n\neq m} d_G(a_n, a_m) > 0.$$

Entonces el dominio $G_0 = G - \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es bass.

Sea B un conjunto compacto en el plano complejo. Si p es un punto de B, se definen para r, $0 < r \leq diam\ B$,

$$\alpha(p,r) \equiv \frac{cap\ (\overline{\Delta}(p,r) \cap B)}{r}$$

y

$$\beta(p,r) \equiv \frac{1}{r} inf\{s : \Delta(p,s) \cap B = \Delta(p,r) \cap B\},$$

donde *cap* es la capacidad logarítmica (ver la definición y algunas de sus más importantes propiedades en [Ts, cap.3]).

La capacidad es lineal respecto a las dilataciones, por lo que α es una medida de lo "grueso" que es el conjunto B alrededor de p, independiente de la escala. De β podría decirse algo parecido: mide lo "rodeado" que está un punto p por el resto del conjunto B, independientemente de la escala. Como la capacidad de un disco cerrado es igual a su radio, siempre se tiene que $\alpha(p,r) \leq \beta(p,r) \leq 1$. β es un concepto más fino que α, ya que los conjuntos numerables tienen capacidad logarítmica cero, mientras que pueden hacer que β esté próximo a 1 (por ejemplo, si $B = \{0\} \cup \{a^n\}_{n=1}^{\infty}$, con $0 < a < 1$, se tiene que $\alpha(0,r) \equiv 0$ y $\beta(0,r) \geq a$).

Es interesante observar que β puede ser definido en cualquier espacio métrico, ya que sólo involucra conceptos métricos.

Si H es un dominio plano e ∞ pertenece a H, se sabe [Po1, pp.192-193],[Po3, pp.302 y 307] que H es modulado si y sólo si $\inf_{p,r} \alpha(p,r) > 0$, y que a su vez esto es equivalente a que $\inf_{p,r} \beta(p,r) > 0$, donde en ambos casos el conjunto B tenido en cuenta es $B = \partial H$.

Se tiene el siguiente recíproco del teorema C.

TEOREMA D. **Supongamos que H es un dominio plano que no es bass y que $\infty \in H$. Entonces $\hat{\mathbb{C}}-H$ es una unión disjunta $P \cup I$, donde I es el conjunto de todos los puntos aislados de ∂H. Los puntos de I están separados en la métrica hiperbólica de $\hat{\mathbb{C}}-P = H \cup I$ y existen constantes c_1 y c_2 tales que si $p \in P$, entonces**

$$\beta(p,r) \geq c_1$$

o

$$\alpha(p, r\beta(p,r)) \geq c_2$$

donde α y β se consideran con $B = P$.

Además $cap\ (\Delta(p,r) \cap P) > 0$ para cada $p \in P$ y cada $r > 0$.

La condición suficiente del teorema C y la condición necesaria del teorema D están muy próximas: en ambas aparece el hecho de que los puntos aislados están separados en la métrica hiperbólica y que la capacidad de la frontera alrededor de los puntos no aislados es positiva. La condición del teorema C sobre α es más fuerte que la del teorema D, pero no difieren demasiado.

En la sección I.5 se describen ejemplos que muestran que la condición del teorema C no es necesaria mientras que la del teorema D no es suficiente.

Estos cuatro teoremas están publicados en [F-R1].

En el segundo capítulo se estudia la existencia de la función de Green en relación con el área de las bolas hiperbólicas. En la introducción del capítulo II se cuentan con detalle los antecedentes históricos de este problema.

Si S es una superficie de Riemann, p es un punto de S y t es un número positivo, denotamos por $A_S(p,t)$ el área de la bola de radio t centrada en p. El problema concreto que se estudia aquí es: ¿qué tipo de crecimiento de $A_S(p,t)$ cuando t tiende a ∞ implica que S posee funcion de Green (que $S \notin O_G$)?

N. Varopoulos sugirió que en esta situación, es decir, si la superficie tiene curvatura constante negativa, un **crecimiento exponencial uniforme del área** debería implicar la existencia de función de Green. Más precisamente, si se define

$$A_S(t) = \inf_{p \in S} A_S(p,t),$$

y se supone que

$$\inf_{t \geq t_0} \frac{\log A_S(t)}{t} > 0,$$

¿puede deducirse que S tiene función de Green?

La conjetura es cierta para el caso de dominios planos, y de hecho se obtiene un resultado más fuerte, como corolario del siguiente teorema.

TEOREMA E. **Si existen un radio t_0 y una constante c_0 tales que**

$$(0.2) \qquad A_S(p, t_0) \geq c_0, \qquad \text{para todo} \quad p \in S,$$

entonces existe una cota inferior positiva para las longitudes de todas las curvas cerradas que no son homótopas a cero. Además, el recíproco también es cierto.

Así se deduce:

COROLARIO 1.1. **Si S es un dominio plano que satisface (0.2) entonces S tiene función de Green.**

Por tanto la observación de Varopoulos se verifica al menos en el caso de superficies de Riemann planas. El mismo argumento funciona para superficies de Riemann de género finito. La situación general es radicalmente diferente. Se demostrará:

TEOREMA F. **Existe una superficie de Riemann R tal que**

$$A_R(p, t) \geq e^{\alpha_0 t}, \qquad \text{para todo} \quad t \geq t_0,$$

donde α_0, t_0 son números positivos, y tal que R no tiene función de Green.

Estos teoremas están publicados en [F-R2].

El capítulo finaliza con unos resultados que conectan la desigualdad isoperimétrica tratada anteriormente con el crecimiento exponencial del área.

PROPOSICION 5.1. **Si S es una superficie de Riemann que no es bass y h es su constante isoperimétrica, para cada $p \in S$ y $t_0, \varepsilon > 0$, existe una constante $C = C(p, t_0, \varepsilon)$ tal que**

$$A_S(p,t) \geq C\, exp[(h^{-1} - \varepsilon)t] \qquad \text{si} \quad t \geq t_0.$$

De la demostración de este enunciado se obtiene un corolario respecto al crecimiento uniforme en los puntos de la superficie, que es el tema de este capítulo.

COROLARIO 5.2. **Si S no es bass, si h es su constante isoperimétrica y si el radio de inyectividad de todos los puntos de S está acotado inferiormente por una constante positiva ι, entonces para cada t_0, $\varepsilon > 0$, existe una constante $C = C(t_0, \varepsilon, \iota)$ independiente de p, tal que**

$$A_S(p,t) \geq C\, exp[(h^{-1} - \varepsilon)t] \qquad \text{si} \quad t \geq t_0.$$

De aquí se deduce el siguiente resultado que, en principio, resulta sorprendente:

COROLARIO 5.3. **Si S es un dominio plano y existen constantes positivas t_0 y c_0 tales que**

$$A_S(p, t_0) \geq c_0 \qquad \text{para todo} \quad p \in S,$$

entonces existen constantes c y α tales que

$$A_S(p,t) \geq c\, e^{\alpha t}$$

para todo $p \in S$ y para todo $t \geq t_0$.

El tercer capítulo trata de singularidades evitables para funciones holomorfas. Uno de los enfoques clásicos de este problema es equivalente a la existencia de funciones holomorfas acotadas no constantes, otro de los tópicos en la teoría de clasificación. El punto de partida serán los siguientes teoremas:

TEOREMA DE RIEMANN. **Si $f \in H(\Delta^*, \Delta)$ entonces f se extiende a una función de $H(\Delta, \Delta)$.**

TEOREMA GRANDE DE PICARD. **Si $f \in H(\Delta^*, \mathbf{C} - \{0,1\})$ entonces f se extiende a una función de $H(\Delta, \hat{\mathbf{C}})$.**

Estos teoremas han sido objeto de importantes generalizaciones, tratando de ampliar respectivamente el conjunto que puede quitarse a Δ en vez de $\{0\}$, y la clase de superficies que pueden colocarse en lugar de $\mathbf{C} - \{0,1\}$:

TEOREMA 0.6. **Sea E un compacto de capacidad analítica cero contenido en Δ, y $f \in H(\Delta - E, \Delta)$. Entonces f se extiende a una función de $H(\Delta, \Delta)$.**

TEOREMA 0.3. **Sea $f \in H(\Delta^*, S)$ donde S es una superficie de Riemann hiperbólica. Entonces se verifica una de las dos siguientes afirmaciones:**
(i) f puede extenderse a una función de $H(\Delta, S)$,
(ii) S está contenida en otra superficie de Riemann $R = S \cup \{p\}$ de tal forma que si se define $f(0) = p$, entonces $f \in H(\Delta, R)$.

La introducción del capítulo III contiene una discusión mucho más detallada de estos teoremas.

Se han conseguido resultados que conectan ambos tipos de generalización.

TEOREMA G. **Si E es un compacto de capacidad analítica cero contenido en Δ, si $f \in H(\Delta - E, S)$ donde S es una superficie de Riemann, y si se verifica que S no es compacta y $f(\Delta - E)$ es relativamente compacto, entonces f se extiende a una función de $H(\Delta, S)$.**

Si E tiene capacidad analítica positiva, es fácil encontrar contraejemplos al teorema G, porque existe una función holomorfa $g : \Delta - E \longrightarrow \Delta$ que no puede extenderse a E; si $\pi : \tilde{S} \longrightarrow S$ ($\tilde{S}$ puede ser Δ, $\mathbf{C}$, o $\hat{\mathbf{C}}$) es un recubrimiento universal, entonces $f = \pi \circ g$ no puede extenderse a E.

Para ver la necesidad de que $f(\Delta - E)$ sea relativamente compacto, basta considerar $S = \mathbf{C}$, $E = \{0\}$ y $f(z) = exp(1/z)$.

Un ejemplo, en la introducción del capítulo III, mostrará que la hipótesis sobre la no compacidad de S también es esencial, pero usando este teorema puede encontrarse un resultado acerca de superficies compactas.

COROLARIO 1.1. **Sea E un compacto de capacidad analítica cero contenido en Δ, sea S una superficie de Riemann compacta y sea $f \in H(\Delta - E, S)$. Si existe un abierto no vacío $\mathcal{U}$ de S tal que $f(\Delta - E)$ tiene intersección vacía con $\mathcal{U}$, entonces f se extiende a una función de $H(\Delta, S)$.**

También se prueba aquí otro resultado de extensión de funciones holomorfas con valores en superficies de Riemann compactas de género mayor que uno, aunque ahora es necesaria una hipótesis adicional.

Uno de los puntos de partida del capítulo III fue el teorema grande de Picard, que habla de singularidades aisladas (recuérdese que $E = \{0\}$ en dicho teorema). Se introduce ahora una medida de "cómo está de aislado" un punto de E. Se probará que si los puntos de E están "suficientemente aislados" (la suficiencia dependerá de S), las funciones de $H(\Delta - E, S)$ pueden extenderse a funciones de $H(\Delta, S)$.

Si E es un compacto y e es un punto de E, para cada $r > 0$ ya se ha definido $\beta(e,r)$ como

$$\beta(e,r) \equiv \frac{1}{r} \, inf \, \{s \, : \, \Delta(e,s) \cap E = \Delta(e,r) \cap E\},$$

y se define ahora

$$\beta^*(e) \equiv \liminf_{r \to 0} \beta(e,r).$$

Si S es una superficie de Riemann hiperbólica, se define la **sístole de** S (y se denomina $Sis(S)$) como el ínfimo de las longitudes de las geodésicas cerradas. Por tanto, si γ es una curva cerrada en S no homótopa a cero, se tiene que

$$L_S(\gamma) \geq Sis(S).$$

Obsérvese que si S es compacta, entonces $Sis(S) > 0$.

Con esta notación, el siguiente teorema se escribe así:

TEOREMA H. **Sea f una función de $H(\Delta - E, S)$, donde S es una superficie de Riemann compacta de género mayor que uno y E es un compacto de capacidad analítica cero, contenido en Δ. Si**

$$\beta^*(e) < exp(-2\pi^2/Sis(S)),$$

para todo punto e de E, entonces f se extiende a una función de $H(\Delta, S)$.

Al llegar a este punto resulta natural preguntarse si se podría probar algún resultado para funciones con valores en superficies compactas de género cero y uno (respectivamente $\hat{\mathbf{C}}$ y $\mathbf{T}$). Como estas superficies no tienen métrica hiperbólica, los métodos desarrollados a partir de esta métrica en principio van a naufragar; pero si se quitan puntos a $\hat{\mathbf{C}}$ y a $\mathbf{T}$, las superficies resultantes sí que tienen métrica hiperbólica y algo puede salvarse del naufragio.

El teorema grande de Picard, punto de partida de todos estos resultados, puede contemplarse desde otro punto de vista:

Si $f \in H(\hat{\mathbf{C}} - E, \hat{\mathbf{C}} - F)$ tiene alguna singularidad y E es un conjunto finito, entonces F consta a lo sumo de dos puntos.

Existen varios teoremas paralelos (ver [Top] para una recopilación) que afirman que si E es "pequeño", entonces F también debe serlo, pero resultados posteriores de Matsumoto [Mat] y Carleson [Ca2] mostraron que el tamaño no lo es todo para el conjunto E, sino que también su geometría juega un importante papel. En esta línea están los últimos resultados:

TEOREMA I. **Dada una sucesión $\{a_k\}_{k=1}^{\nu+1}$ (ν puede ser un número natural o infinito, en cuyo caso exigirá a la sucesión que tienda a ∞) de números complejos "bien distribuidos", existe una gran variedad de conjuntos de Cantor E "adecuados" tales que si $f : \hat{\mathbf{C}} - E \longrightarrow \mathbf{C} - \{a_k\}_{k=1}^{\nu+1}$ es holomorfa, entonces f se extiende a una función holomorfa en toda la esfera, y por tanto es racional.**

También se prueba en esta tesis un resultado de este tipo, cuando la superficie de llegada es un toro cualquiera menos un punto.

TEOREMA J. **Si E es un conjunto de Cantor "adecuado" y f está en la clase $H(D - E, \mathbf{T} - \{p\})$, entonces f se extiende a una función de $H(D, \mathbf{T})$.**

Notación:

Los símbolos d_S, $diam_S$, L_S, A_S, B_S, λ_S denotarán respectivamente la distancia, el diámetro, la longitud, el área, la bola y la densidad de la métrica en S con respecto a la métrica euclídea (esto último sólo si S es un dominio contenido en $\mathbf{C}$), cuando se considera a S dotada de su métrica de Poincaré.

Cuando estos símbolos aparezcan sin el subíndice S, denotarán estos mismos conceptos pero ahora referidos a la métrica euclídea usual.

Si el subíndice es $\hat{\mathbf{C}}$, denotarán estos mismos conceptos pero ahora relativos a la métrica esférica que se define en la sección III.4. No hay posibilidad de confusión, ya que $\hat{\mathbf{C}}$ no tiene métrica hiperbólica.

La capacidad logarítmica de un conjunto se denotará por cap, su capacidad logarítmica hiperbólica por cap_h [Ts, p.94], y su dimensión de Hausdorff por dim.

$\Delta(a,r)$ es el disco euclídeo de centro a y radio r, $\overline{\Delta}(a,r)$ es la clausura de $\Delta(a,r)$, $\Delta(a,r)^* = \Delta(a,r) - \{a\}$ y $\Delta_r = \Delta(0,r)$, por lo que $\Delta_1 = \Delta$.

C denotará una constante cuyo valor puede variar de línea en línea, e incluso dentro de la misma línea.

CAPITULO I. Superficies de Riemann bass y aplicaciones cuasiconformes.

En este capítulo vamos se estudia cierta medida del "tamaño" de una superficie de Riemann hiperbólica S (o de su "frontera").

Dada una curva cerrada γ con punto base $p \in S$, denotamos por $[\gamma]$ la clase de homotopía de γ en $\Pi_1(S,p)$, el primer grupo de homotopía o grupo fundamental de S [Mas]. Entonces podemos definir

$$L([\gamma]) = inf\{L_S(\eta) : \eta \in [\gamma]\},$$

y considerar, para cada $t > 0$, la función tipo zeta

$$U_t(p) = \sum_{[\gamma]\in\Pi_1(S,p)} exp(-tL([\gamma])),$$

que involucra simultáneamente la geometría y la topología de S. Obsérvese que la definición es válida en toda variedad Riemanniana n-dimensional.

De la propia definición se deduce que $logU_t$ es una función Lipschitz en S; de hecho se tiene que

$$| \, logU_t(p) - logU_t(q) \, | \leq 2t \, d_S(p,q),$$

siempre que U_t sea finita en p o en q. Esto implica que si U_t es finita en un punto, entonces es finita en cualquier otro punto de S.

Si $\pi : \Delta \longrightarrow S = \Delta/\Gamma$ es un recubridor universal con $\pi(0) = p$ y γ es una curva cerrada en S con punto base p, $\tilde{\gamma}$ denota la elevación de γ a Δ que comienza en 0 y acaba en z. Este punto final z es el mismo para la elevación de cualquier curva homótopa a γ que comience en 0. Además, $z = T0$ para una única $T \in \Gamma$. Si σ es el segmento que une 0 con z, se tiene

$$L_S(\pi \circ \sigma) = L_\Delta(\sigma) \leq L_\Delta(\tilde{\eta}) = L_S(\eta)$$

para toda $\eta \in [\gamma]$, ya que σ es la curva más corta que une 0 y z; y como además $\pi \circ \sigma \in [\gamma]$, se tiene que $L([\gamma])$ es de hecho un mínimo y

$$L([\gamma]) = L_S(\pi \circ \sigma) = d_\Delta(0,T0) = log\frac{1+ \mid T0 \mid}{1- \mid T0 \mid}.$$

Por tanto, se ha obtenido otra expresión para U_t :

$$U_t(p) = \sum_{T\in\Gamma} \left(\frac{1- \mid T0 \mid}{1+ \mid T0 \mid}\right)^t,$$

y ya que $1 \leq (1+ \mid T0 \mid)^t \leq 2^t$, U_t es finita si y sólo si lo es la serie $\sum(1- \mid T0 \mid)^t$.

Un simple argumento de empaquetamiento de puntos de la órbita, muestra que U_t es finita para todo $t > 1$ y para todo grupo Fuchsiano Γ [Ts, p.516]. Resulta natural introducir el denominado **exponente de convergencia** $\delta(S)$ o $\delta(\Gamma)$

$$\delta(\Gamma) = inf\{t : \sum_{T\in\Gamma}(1- \mid T0 \mid)^t < \infty\},$$

que es la abscisa de convergencia de la función zeta de arriba. Se obtiene el mismo exponente si se sustituye 0 por cualquier otro punto del disco unidad, ya que eso supone una conjugación en el grupo Γ. Se sigue de lo que ya se ha dicho que $\delta(S)$ está en el intervalo $[0, 1]$. Además, $\delta(S)$ es igual a cero sólo en el caso de que S sea conformemente equivalente a un disco o a un anillo.

El teorema de Myrberg [Ts, p.522] asegura que S tiene función de Green si y sólo si U_1 es finita. Este es uno de los muchos resultados conocidos acerca de estas series de Poincaré.

En cierto sentido, δ mide el tamaño de S o de su "frontera". Si se consideran los dominios planos $S_t = \{z \in \mathbf{C} : t <\mid z \mid< 1\}$, para $t \in [0, 1)$, se observa que existen difeomorfismos entre dos cualesquiera de ellos (aunque no existe una aplicación conforme que lleve uno de ellos en ningún otro), y por tanto, todos los grupos de homotopía son isomorfos. Sin embargo, la geometría de S_0 es radicalmente distinta de la de cualquier otro S_t, ya que en S_t cualquier curva no trivial tiene al menos longitud $2\pi^2/log(1/t)$, mientras que en S_0 hay curvas no triviales de longitud arbitrariamente pequeña. La causa es que la frontera de S_0 es "considerablemente más pequeña" que la de cualquier otro S_t. Esto lo detecta el exponente de convergencia, ya que $\delta(S_t) = 0$ si $t \in (0, 1)$ y $\delta(S_0) = 1/2$.

Existe una relación directa entre $\delta(S)$ y el conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$ de Γ. $\Lambda(\Gamma)$ es el subconjunto cerrado de $\partial\Delta$ que se define como el conjunto de puntos de acumulación (derivado) de la órbita de 0, a la que se denotará por $\Gamma(0)$. Un poco de geometría hiperbólica muestra que se obtiene el mismo conjunto límite si en vez de considerar la órbita de 0 se considera la órbita de cualquier otro punto del disco unidad. Hay un importante subconjunto de $\Lambda(\Gamma)$, el conjunto límite radial o cónico $C(\Gamma)$, que se define como el conjunto de los $\xi \in \Lambda(\Gamma)$ tales que alguna subsucesión de $\Gamma(0)$ está en algún cono de Stolz con vértice en ξ. Si $z \in \Delta$, $\xi \in \partial\Delta$ y $\lambda \in (0, \pi/2)$, se dice que z pertenece al cono con vértice en ξ y de apertura λ si el ángulo entre los vectores ξ y $\xi - z$ es a lo sumo λ, y si además $|z - \xi| < 2\cos\lambda$. $C(\Gamma)$ también es independiente de la órbita usada. Para ver una definición detallada de estos conjuntos y una exposición de sus más importantes propiedades, ver [N2].

Ambos conjuntos límite coinciden salvo un conjunto numerable, que corresponde a los puntos fijos de los elementos parabólicos, si Γ es finitamente generado o, equivalentemente, si Γ admite un dominio fundamental con un número finito de lados. No es así en general, ya que si $\hat{\mathbf{C}} - E = \Delta/\Gamma$, donde E es el conjunto de Cantor, $\Lambda(\Gamma) = \partial\Delta$, mientras que $dim\ C(\Gamma) < 1$ (esto se deduce del teorema C y del próximo resultado).

Un importante teorema de Patterson y Sullivan [N2, p.159] afirma que

$$\delta(S) = dim\ C(\Gamma),$$

(con la única excepción de $S = \Delta^*$, ya que $\delta(\Delta^*) = 1/2$ y $\Lambda(\Delta^*)$ consta de un único punto), y en particular,

$$\delta(S) \leq dim\ \Lambda(\Gamma),$$

por lo que si Γ es finitamente generado, entonces

$$\delta(S) = dim\ \Lambda(\Gamma).$$

"Escuchemos" ahora la superficie S, en la terminología de Kac [Kac]. Las frecuencias fundamentales que emitiría una membrana elástica que tuviera la forma de la superficie S son los autovalores de su operador de Laplace-Beltrami o, más abreviadamente, de su laplaciano. El convenio para la elección del signo del laplaciano, es tomar aquel que lo convierte en un operador semidefinido positivo (se define $\Delta f = -div(grad\, f)$). El menor autovalor del laplaciano para el problema de Dirichlet con valor 0 en ∞, puede definirse en términos del cociente de Rayleigh, como

$$b(S) = \inf_{f \in C_c^\infty(S)} \frac{\iint \| grad(f) \|^2 \, d\omega}{\iint f^2 d\omega},$$

donde $\| \ \|, grad$ y $d\omega$ se refieren a la métrica de Poincaré de S, y ambas integrales están extendidas a S.

Obsérvese que la integral de Dirichlet es un invariante conforme, es decir, si S es un dominio plano, entonces

$$\iint_S \| grad(f) \|^2 \, d\omega = \iint_S | \nabla f |^2 \, dxdy,$$

donde ahora $| \ |, \nabla$ y $dxdy$ se refieren a la métrica euclídea en la segunda integral. Para verificar esto, basta con observar que $grad(f) = \lambda^{-2} \nabla f$, $\| \ \|^2 = \lambda^2 \ | \ |^2$ y $d\omega = \lambda^2 dxdy$. Estas fórmulas son ciertas para cualquier métrica conforme $g = \lambda^2(dx^2 + dy^2)$ en un abierto de $\mathbf{R}^2$, y no sólo para la métrica de Poincaré.

Sabemos que $b(S)$ está en el intervalo $[0, 1/4]$. De hecho, un teorema de Elstrodt-Patterson-Sullivan [Sul2] dice que

$$b(S) = \begin{cases} 1/4 & \text{si} \quad 0 \leq \delta(S) \leq 1/2 \\ \delta(S)(1 - \delta(S)) & \text{si} \quad 1/2 \leq \delta(S) \leq 1. \end{cases}$$

Una superficie se denomina bass si $b(S) = 0$, o equivalentemente, si $\delta(S) = 1$. La traducción literal del término inglés bass en este contexto sería "bajo" o "barítono," y como siempre se tiene $b(S) \geq 0$, damos este nombre a las superficies que dan la nota más baja.

Si una superficie de Riemann no es bass, entonces tiene función de Green; de hecho, existe una autofunción positiva y C^∞ del laplaciano con autovalor t para cada $t < b(S)$. Ver [Sul2, p.328]. El hecho de que S tenga función de Green también se deduce del teorema de Myrberg.

Desde Teichmüller se ha venido estudiando la estabilidad de los invariantes conformes de las superfices de Riemann cuando la métrica se deforma cuasiconformemente. Técnicamente, si S_1 y S_2 son dos superficies y $f : S_1 \rightarrow S_2$ es una aplicación cuasiconforme, se desea estudiar la relación existente entre los invariantes geométricos de S_1 y S_2.

En la teoría de clasificación de superficies de Riemann aparecen cuatro clases fundamentales de superficies: La clase de las superficies que no tienen función de Green se denota O_G. La clase de superficies de Riemann en las que las únicas funciones armónicas positivas son las constantes se denota O_{HP}, y contiene a O_G. Llamamos O_{HB} a la clase de superficies en las que las únicas funciones armónicas acotadas son las constantes. Evidentemente, O_{HB} contiene a O_{HP}. Virtanen [Vi] y Royden [Ro1] probaron que la clase O_{HD} de superficies que no poseen funciones armónicas no constantes con integral de Dirichlet finita es idéntica a la clase O_{HBD} de superficies que no tienen funciones armónicas acotadas no constantes con integral de Dirichlet finita. Esto prueba en particular que O_{HD} contiene a O_{HB}. Tenemos pues, el siguiente conjunto de inclusiones:

$$O_G \subset O_{HP} \subset O_{HB} \subset O_{HD} = O_{HBD}.$$

Se sabe que para superficies de género finito, de forma análoga al caso de género cero, se tiene que $O_G = O_{HD}$, pero Ahlfors y Royden [A-R], y Toki [Tok1], [Tok2] han probado que para superficies de Riemann arbitrarias las inclusiones son todas propias. Una descripción detallada puede encontrarse en [A-S].

Por lo que ya se ha visto, se sabe que las superficies bass contienen a la clase O_G. Un problema abierto que sería interesante estudiar es la relación entre la clase de superficies bass y O_{HB}. Como $O_{HB} = O_G$ para superficies de género finito, O_{HB} está contenida en la clase de superficies bass en este caso. Esta inclusión también se mantiene para superfices que son recubridores regulares de una superficie compacta. Sabemos probar que si S no es bass, entonces el índice de Varopoulos [Va2] $\alpha(S)$ es positivo, lo cual implica la existencia de funciones armónicas acotadas (aunque él lo prueba sólo en el caso en que $1/2 < \delta(S) < 1$). Además el contenido es estricto, ya que $\Delta - \{0\} - \{2^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ es un dominio bass que no está en O_{HB}. De momento ignoramos si esta inclusión se mantiene en el caso general.

El primer resultado acerca de la conservación de una de estas clases bajo aplicaciones cuasiconformes es el de O_G [Pf]. En [Ro2] Royden se preguntó si también se conservaría la clase O_{HB}. Esta es una pregunta razonable, ya que, como se ha comentado, en el caso de género finito $O_G = O_{HB}$. Recientemente P. Doyle y T.Lyons [L], trabajando independientemente, encontraron pares de superficies de Riemann cuasiisométricas (y de hecho cuasiconformemente equivalentes), una de las cuales no está en O_{HB} y la otra está en O_{HP}. Por tanto, ni O_{HB} ni O_{HP} se conservan mediante aplicaciones cuasiconformes, mientras que O_{HD} es claramente invariante cuasiconforme, puesto que éstas aplicaciones cuasiconservan la integral de Dirichlet.

Se ha probado:

TEOREMA A. **Si una superficie de Riemann S_1 es bass y es cuasiconformemente equivalente a S_2, entonces S_2 es bass.**

Por tanto, ser bass es una propiedad cuasiconformemente invariante.

Es fácil ver que si $f : S_1 \to S_2$ es una aplicación k-cuasiconforme entonces $k^{-1}\delta(S_1) \leq \delta(S_2) \leq k\delta(S_1)$, pero esto no ayuda en la prueba del teorema A.

Se verá que ser bass es un concepto puramente geométrico (dado que la curvatura de nuestras superficies es siempre -1).

Se dice que una superficie de Riemann S satisface la **desigualdad isoperimétrica lineal** (DIL) si existe una constante positiva $h(S)$ tal que para todo abierto G relativamente compacto y con frontera suave, se tiene que

$$A_S(G) \leq h(S)L_S(\partial G). \tag{0.1}$$

Sea $\mathcal{D}(S)$ el conjunto de tales abiertos G.

Por supuesto, el plano hiperbólico satisface la DIL con $h = 1$.

Un teorema general de Cheeger establece que si una superficie S satisface la DIL entonces no es bass, y de hecho se tiene la estimación $b(S) \geq 1/(4h(S)^2)$. La curvatura negativa fuerza una desigualdad en la dirección opuesta. Más concretamente:

TEOREMA B. **Una superficie de Riemann S no es bass si y sólo si satisface la DIL. Además, se tiene que**

$$\frac{1}{4} \leq b(S)h(S)^2 \quad \text{y} \quad b(S)h(S) \leq \frac{3}{2}.$$

Este resultado es conocido. Además, es cierto incluso en dimensiones superiores y con hipótesis más débiles sobre la curvatura [Bu2, p.228]. Pero la prueba que se da aquí se adapta a esta situación y el argumento que usa será necesario más adelante en la prueba del teorema A.

No deja de ser sorprendente que aunque las aplicaciones cuasiconformes no conserven longitud ni área, sí conserven la existencia de la DIL. Por otra parte, la composición de una función armónica con una cuasiconforme, no tiene por qué ser ni siquiera superarmónica; por tanto, no se conservan ni autofunciones ni autovalores, aunque sí el hecho de que el menor autovalor sea positivo.

El siguiente objetivo será estudiar qué dominios planos son bass. Los dominios planos que tienen función de Green son aquéllos cuyo complemento tiene capacidad logarítmica positiva. Decidir cuándo un dominio plano es bass es una cuestión más delicada. Por ejemplo, $\Delta - \{0\} - \{2^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ es bass mientras que $\Delta - \{1 - 2^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ no lo es.

Los teoremas C y D dan una condición necesaria y otra suficiente para que un dominio plano sea bass, y ambas condiciones están muy próximas.

Un dominio G de la esfera se denomina **modulado** si existe una cota superior para el módulo de todo dominio doblemente conexo $H \subset G$ que separa la frontera de G. El ínfimo de tales cotas superiores se denomina el módulo de G.

Existe un gran número de caracterizaciones de estos dominios y se conocen muchas de sus propiedades. (Ver por ejemplo [B-P],[Po1],[Po3],[Mi]).

TEOREMA C. **Supongamos que G es modulado y que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión (finita o infinita) separada en la métrica hiperbólica de G, es decir, que verifica**

$$\inf_{n\neq m} d_G(a_n, a_m) > 0.$$

Entonces el dominio $G_0 = G - \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es bass.

Si la sucesión es finita, la condición de separación de los puntos es automática.

Este resultado generaliza el de [Fe3], donde se había demostrado que los dominios modulados no son bass.

Sea B un conjunto compacto en el plano complejo. Si p es un punto de B, se definen para r, $0 < r \leq diam\ B$,

$$\alpha(p, r) = \frac{cap\ (\overline{\Delta}(p, r) \cap B)}{r}$$

y

$$\beta(p, r) = \frac{1}{r} inf\{s : \Delta(p, s) \cap B = \Delta(p, r) \cap B\}.$$

Conviene destacar el hecho de que β puede ser definido en cualquier espacio métrico, ya que sólo involucra conceptos métricos.

Si H es un dominio plano e ∞ pertenece a H, se sabe [Po1, pp.192-193],[Po3, pp.302 y 307] que H es modulado si y sólo si $\inf_{p,r} \alpha(p, r) > 0$, y que a su vez esto es equivalente a que $\inf_{p,r} \beta(p, r) > 0$, donde en ambos casos el conjunto B tenido en cuenta para el cálculo es $B = \partial H$. Siempre se tiene la desigualdad $\alpha(p, r) \leq \beta(p, r) \leq 1$. Un conjunto B que verifica $inf\{\alpha(p, r) : p \in B, 0 < r \leq diam\ B\} > 0$ se denomina **uniformemente perfecto**.

El siguiente resultado es casi un recíproco del teorema C.

TEOREMA D. Supongamos que H es un dominio plano que no es bass y que $\infty \in H$. Entonces $\hat{\mathbb{C}}-H$ es una unión disjunta $P \cup I$, donde I es el conjunto de todos los puntos aislados de ∂H. Los puntos de I están separados en la métrica hiperbólica de $\hat{\mathbb{C}}-P = H \cup I$ y existen constantes c_1 y c_2 tales que si $p \in P$, entonces

$$\beta(p,r) \geq c_1$$

o

$$\alpha(p, r\beta(p,r)) \geq c_2$$

donde α y β se consideran con $B = P$.

Además $cap\,(\Delta(p,r) \cap P) > 0$ para cada $p \in P$ y cada $r > 0$.

En la sección I.5 se dan ejemplos que muestran que la condición del teorema C no es necesaria mientras que la del teorema D no es suficiente. Sería interesante encontrar una caracterización en términos euclídeos de los dominios planos (o al menos de los dominios planos cuya frontera está contenida en la recta real, es decir, los dominios de Denjoy) que son bass.

Es interesante destacar el hecho de que se están relacionando condiciones que pueden "verse con ojos euclídeos" con el hecho de que exista la DIL, que es un concepto que depende intrínsecamente de la estructura métrica hiperbólica. Podría decirse que ésta es una de las muchas formas de ver que la métrica de Poincaré no es algo artificial en la variable compleja.

La organización de este primer capítulo es la siguiente: En la sección 1 se prueba el teorema B. La prueba del teorema A se encuentra en la sección 2, y finalmente las demostraciones de los teoremas C y D aparecen en las secciones 3 y 4 respectivamente. La sección 5 contiene los ejemplos a los que ya se ha aludido.

Notación:

Si F es un conjunto cerrado $F^a = ais\,(F)$ es el conjunto de todos los puntos aislados de F, y $F^d = der\,(F)$ es el conjunto de todos los puntos de acumulación de F (el conjunto derivado de F).

A^c es el complementario de A.

SECCION I.1. Prueba del teorema B.

TEOREMA B. **Una superficie de Riemann S no es bass si y sólo si satisface la desigualdad isoperimétrica. Además, se tiene que**

$$\frac{1}{4} \leq b(S)h(S)^2 \qquad \text{y} \qquad b(S)h(S) \leq \frac{3}{2}.$$

Si S satisface la DIL, como ya se ha comentado anteriormente, la desigualdad de Cheeger [Che],[Cha, p.95] establece que S no es bass y que, de hecho, se tiene la desigualdad

$$b(S)h(S)^2 \geq \frac{1}{4}.$$

Si se supone ahora que S no es bass, se verá que debe satisfacer la DIL.

El primer paso es verificar que basta probar la DIL sólo para los dominios geodésicos de S. Por un **dominio geodésico** se entiende un dominio $G \subset S$, tal que ∂G es una cantidad finita de geodésicas simples cerradas, y $A_S(G)$ es finita. G no tiene por qué ser relativamente compacto ya que puede "rodear" un número finito de punturas. Desde este punto de vista se considerarán las punturas como geodésicas impropias de longitud cero.

Una **puntura** en una superficie de Riemann S es el "tipo de frontera" de S que se origina a causa de un elemento parabólico en el grupo Fuchsiano que representa a la superficie. Por conjugación siempre puede suponerse que este elemento parabólico es la transformación $Tz = z + 1$, y por tanto, existirá una región $A = \{0 \leq x < 1, y > \eta\}$ para algún η suficientemente grande, tal que si $\pi : U \to S = U/\Gamma$ es el recubrimiento universal asociado a ese grupo, π aplica inyectivamente la región A en un entorno de la puntura, y lleva las líneas verticales en U sobre las geodésicas que "emanan" de la puntura.

Este entorno siempre va a ser isométrico a un entorno de 0 en Δ^*, o lo que es lo mismo, a una región de la pseudoesfera originada en $\mathbf{R}^3$ por la rotación de la tractriz. Se deduce de esto que en la clase de homotopía libre de las curvas que "rodean" una puntura, hay curvas de longitud arbitrariamente pequeña. Y el recíproco también es cierto: si en una clase de homotopía libre en una superficie de Riemann, dotada de su métrica de Poincaré, hay curvas de longitud arbitrariamente pequeña, entonces esa clase corresponde a una puntura.

Si S es un subdominio de la esfera, las punturas de S son los puntos aislados de ∂S.

Antes que nada, se tratan algunos casos elementales.

LEMA 1.1. a) **Si S es una superficie de Riemann simple o doblemente conexa entonces la DIL se verifica con constante 1.**

b) **Si S es una superficie de Riemann y $\Omega \in \mathcal{D}(S)$ es un dominio simple o doblemente conexo en S, entonces**

$$A_S(\Omega) \leq L_S(\partial\Omega).$$

Demostración: Para ver que Δ satisface la DIL con $h = 1$, basta con seguir el razonamiento del comienzo de la sección I.3 y observar que

$$|\nabla log \lambda_\Delta(z)| = |z| \lambda_\Delta(z) \leq \lambda_\Delta(z).$$

Si Ω es un simplemente conexo en S, entonces Ω se eleva a $\tilde{\Omega}$ en Δ y $\pi : \tilde{\Omega} \to \Omega$ es biholomorfa, por lo que

$$A_S(\Omega) = A_\Delta(\tilde{\Omega}) \leq L_\Delta(\partial\tilde{\Omega}) = L_S(\partial\Omega).$$

Por un doblemente conexo en S se entiende un dominio con dos curvas frontera (una de las cuales puede reducirse a un punto) libremente homótopas entre sí. Si Ω es un doblemente conexo en S y sus curvas frontera son homótopas a cero, existe un dominio $\Omega^* \supset \Omega$, que es simplemente conexo y cuya frontera es una de las curvas de Ω (Ω^* se construye "rellenando el agujero que tiene Ω"). Por tanto

$$A_S(\Omega) \leq A_S(\Omega^*) \leq L_S(\partial\Omega^*) \leq L_S(\partial\Omega).$$

Si Ω es un doblemente conexo en S y sus curvas frontera γ_1 y γ_2 no son homótopas a cero ni a una puntura, sea γ la geodésica en la clase de homotopía libre de γ_1. Sea B la banda $B = \{0 < Imz < 1\}$ con $\lambda_B(z) = \pi/sen(\pi y)$ y sea $\pi : B \to S$ un recubrimiento universal con $\pi(\omega) = \gamma$, donde ω es la geodésica $\omega = \{Imz = 1/2\}$. Si $l = L_S(\gamma)$, entonces el automorfismo de B que representa a γ es $Tz = z + l/\pi$.

Sea $\tilde{\gamma}_i$, i=1,2, una elevación de γ_i tal que $d_B(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2) = d_S(\gamma_1, \gamma_2)$. Entonces, si $\tilde{\Omega}$ es el dominio de B limitado por $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$, $\{Rez = 0\}$ y $\{Rez = l/\pi\}$, se tiene que $\pi(\tilde{\Omega}) = \Omega$.

Sea Ω^* la envolvente convexa (hiperbólica) de $\tilde{\Omega}$ en la banda B, que estará limitada por a, b, $\{Rez = 0\}$ y $\{Rez = l/\pi\}$, donde ahora a y b son curvas que pueden expresarse como funciones de x con $a(x) \leq b(x)$. Se tiene

$$A_B(\Omega^*) = \int_0^{l/\pi} \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\pi^2 dydx}{sen^2(\pi y)} = \pi \int_0^{l/\pi} [cotan(\pi a(x)) - cotan(\pi b(x))]dx$$

$$L_B(a) + L_B(b) = \int_0^{l/\pi} \frac{\pi}{sen(\pi a(x))} \sqrt{1 + a'(x)^2} dx + \int_0^{l/\pi} \frac{\pi}{sen(\pi b(x))} \sqrt{1 + b'(x)^2} dx.$$

Como $|cotan(\pi u)| \leq cosec(\pi u)$ si $u \in (0, 1)$, entonces se tiene que

$$A_B(\Omega^*) \leq L_B(a) + L_B(b),$$

y

$$A_S(\Omega) \leq A_B(\tilde{\Omega}) \leq A_B(\Omega^*) \leq L_B(a) + L_B(b) \leq$$

$$\leq L_B(\tilde{\gamma}_1) + L_B(\tilde{\gamma}_2) = L_S(\gamma_1) + L_S(\gamma_2) = L_S(\partial\Omega).$$

La primera desigualdad se tiene porque $\pi(\tilde{\Omega}) = \Omega$, y π es holomorfa. La cuarta desigualdad se debe al hecho de que la frontera de la envolvente convexa de un conjunto es más corta que la frontera de ese mismo conjunto.

Si γ_1 y γ_2 son homótopas a una puntura, no existe una geodésica en su clase de homotopía libre, ya que en ella hay curvas de longitud arbitrariamente pequeña. Sin embargo, el argumento es completamente análogo si se considera $\pi : U \to S$ con $Tz = z + 1$ la transformación parabólica que representa a la puntura, con la métrica hiperbólica en U.

Esto prueba la parte b). La parte a) se deduce observando que cuando S es simple o doblemente conexa, cualquier dominio de $\mathcal{D}(G)$ puede reducirse a los casos anteriores por la linealidad de la DIL. $\#L1.1.$

Al verificar siempre la desigualdad deseada, no hay que preocuparse por los dominios simple y doblemente conexos. Este es un detalle técnico necesario, ya que a dichos dominios no se les puede asociar ningún dominio geodésico cuyas curvas frontera sean libremente homótopas a las del dominio original. La razón es sencilla: la curvatura negativa impide que una curva simple, cerrada y homótopa a cero pueda ser una geodésica, del mismo modo que no permite que existan dos geodésicas simples cerradas libremente homótopas entre sí.

LEMA 1.2. **Si S satisface la DIL para subdominios geodésicos, entonces S satisface la DIL.**

Demostración: Supongamos que $\Omega \in \mathcal{D}(S)$ y que

$$L_S(\partial\Omega) < \varepsilon A_S(\Omega) \tag{1.1}$$

donde $\varepsilon < 1/2$. Vamos a ver que entonces existe un dominio geodésico G con

$$L_S(\partial G) < \frac{\varepsilon}{1-2\varepsilon} A_S(G). \tag{1.2}$$

Con esto se habrá terminado la prueba.

Por el lema 1.1, puede suponerse que $\partial\Omega$ es una unión finita de curvas simples cerradas disjuntas $\gamma_1, ..., \gamma_n$, con $n > 2$. Además, puede suponerse que ninguna γ_i es homótopa a cero. Si alguna lo fuese, entonces sería la frontera de un dominio simplemente conexo V, y en ese caso podría tomarse el nuevo dominio $\Omega \cup \overline{V}$, disminuyendo así la longitud de su frontera (se ha quitado $L_S(\gamma_i)$) y aumentando su área (se ha añadido $A_S(V)$).

Sea b_i la geodésica en la clase de homotopía libre de γ_i (recuérdese que b_i puede ser una puntura). Sea G el dominio "acotado" por las b_i. Entonces G es un dominio geodésico, y $L_S(\partial G) \leq L_S(\partial\Omega)$. Ahora sólo resta comparar $A_S(G)$ con $A_S(\Omega)$, y se tiene que

$$A_S(G) \geq A_S(\Omega) - 2L_S(\partial\Omega). \tag{1.3}$$

Esta estimación surge de observar que cuando se reemplaza una γ_i por una b_i se pierde a lo sumo un área de $L_S(\gamma_i) + L_S(b_i)$. Esto se deduce, si $\gamma_i \cap b_i = \emptyset$, del lema 1.1 b), ya que γ_i y b_i acotan un dominio doblemente conexo. Si $\gamma_i \cap b_i \neq \emptyset$, entonces acotan uno o varios dominios simplemente conexos, y por tanto estos dominios pueden elevarse al disco unidad y usar su DIL. Si b_i es una puntura, simplemente se gana área.

De (1.1) y (1.3) se obtiene

$$L_S(\partial\Omega) < \frac{\varepsilon}{1-2\varepsilon} A_S(G)$$

y ya que $L_S(\partial G) \leq L_S(\partial\Omega)$ se consigue el resultado.

Además, si $A_S(G) \leq h_g(S) L_S(\partial G)$ para todo dominio geodésico G, entonces

$$h(S) \leq 2 + h_g(S). \qquad \#L1.2. \tag{1.4}$$

La razón por la que es conveniente trabajar con dominios geodésicos es sencilla: ya que se quiere relacionar $b(S)$ con $h(S)$, lo primero que se puede intentear es usar la desigualdad

$$b \leq \frac{\iint |\nabla f|^2}{\iint f^2}$$

para cierta f suficientemente suave y de soporte compacto, tal que $\iint |\nabla f|^2$ sea comparable con $L_S(\partial G)$ y $\iint f^2$ con $A_S(G)$. Como habrá que usar cartas locales para construir una tal f, es conveniente que ∂G sea tal que permita tomar las mejores cartas. Alrededor de geodésicas simples cerradas puede tomarse de una forma canónica la mejor carta posible: el recubrimiento universal. Esto va a permitir probar de una forma sencilla el lema 1.3.

Ahora se necesita alguna información específica sobre geodésicas y punturas, que se recopila en los siguientes lemas.

LEMA 1.3. **Sea S una superficie de Riemann y γ una geodésica simple cerrada en S. Sea ahora $\Omega = \{p \in S : d_S(p,\gamma) \leq d\}$. Entonces**

$$A_S(\Omega) \leq 2\,senh(d)\; L_S(\gamma).$$

La desigualdad es la mejor posible.

Demostración: Sea T la transformación de Möbius de U en U que representa a γ. Se puede suponer, ya que puede conseguirse mediante una conjugación del grupo, que $Tz = \lambda z$ con longitud de traslación $\log \lambda = L_S(\gamma)$, y que π (el recubrimiento universal) aplica

$$\tilde{\gamma} = \{iy : 1 \leq y < e^{L_S(\gamma)}\}$$

sobre γ.

Si $\tilde{\Omega} = \{z \in U : d_U(z, \tilde{\gamma}) \leq d,\ 1 \leq |z| \leq e^{L_S(\gamma)}\}$, entonces $\pi(\tilde{\Omega}) = \Omega$ y se tiene que $A_U(\tilde{\Omega}) = 2\, senh(d)\, L_U(\tilde{\gamma}) = 2\, senh(d)\, L_S(\gamma)$.

Ahora,

$$A_S(\Omega) \leq A_U(\tilde{\Omega}) = 2\, senh(d)\, L_S(\gamma)$$

donde la desigualdad se deduce porque las aplicaciones holomorfas disminuyen el área. $\#L1.3$.

Puesto que la longitud extremal va a jugar un importante papel, tanto en este capítulo como en el siguiente, se define a continuación.

Sean W un dominio en la superficie de Riemann S, y Γ un conjunto de curvas rectificables en W. Para cada densidad lineal (o "métrica") ρ en W, definida en coordenadas locales de tal forma que $\rho(z)|dz|$ es invariante, donde ρ es semicontinua inferiormente y mayor o igual que cero, podemos definir la ρ-longitud de $\gamma \in \Gamma$ por

$$L(\gamma, \rho) \equiv \int_\gamma \rho(z)|dz|, \qquad \text{y} \qquad L(\Gamma, \rho) \equiv \inf_{\gamma \in \Gamma} L(\gamma, \rho).$$

Si ahora se define la ρ-área de W como

$$A(W, \rho) \equiv \int_W \rho(z)^2 dx dy,$$

la **longitud extremal** de Γ en W se define mediante la expresión

$$\lambda_W(\Gamma) \equiv \sup_\rho \frac{L(\Gamma, \rho)^2}{A(W, \rho)},$$

donde el supremo se toma sobre todas las densidades lineales ρ en W como las que se han descrito, que no son idénticamente cero.

Por supuesto, es muy fácil obtener una cota inferior de $\lambda_W(\Gamma)$, sin más que evaluar el término que aparece dentro del supremo para una ρ cualquiera.

Si E_1, E_2 son dos conjuntos cerrados no vacíos contenidos en $\overline{W}$, se denota por Γ la familia de curvas que unen E_1 y E_2. Se escribe $\lambda_W(E_1, E_2) \equiv \lambda_W(\Gamma)$ y se llama a esta cantidad (la longitud extremal de Γ en W), la **distancia extremal** entre E_1 y E_2. Para ver la definición más detalladamente, consultar [A-S, pp.220-225].

Una tercera forma en que puede definirse el módulo de un doblemente conexo es como la distancia extremal entre las dos componentes de su frontera. Este es el motivo que justifica la aparición del 2π en la primera definición.

Si W es el interior de una superficie compacta con borde $\overline{W}$ y E_1, E_2 son cada uno la unión de un número finito de subarcos o de arcos completos del borde de W, entonces existe una única función armónica acotada u que es 0 en E_1, 1 en E_2, y cuya derivada normal se anula en la parte restante del borde de W.

TEOREMA 1.4. ([A-S, p.225]) **La distancia extremal entre E_1 y E_2 es igual a $1/D(u)$.**

Recuérdese que la longitud extremal y la integral de Dirichlet $D(u)$ son invariantes conformes.

Sea p una puntura en S. Un **collar** alrededor de p es un dominio doblemente conexo en S acotado por p y por una curva de Jordan (llamada la curva frontera del collar) ortogonal al conjunto de geodésicas que emanan de p. Un collar alrededor de p de área β se denomina un β-collar: $C_\beta(p)$.

LEMA 1.5. **Si p es una puntura, entonces dado un $\beta \leq 1$ y un $\varepsilon > 0$, si se toma $\alpha = (1/\beta + 1/\varepsilon)^{-1}$, la función v armónica en $C_\beta(p) - C_\alpha(p)$ que es 1 sobre la curva frontera de $C_\beta(p)$ y 0 sobre la curva frontera de $C_\alpha(p)$, satisface**

$$\iint_{C_\beta(p)-C_\alpha(p)} |\nabla v|^2 = \varepsilon.$$

Demostración: S puede representarse como U/Γ y se puede suponer, ya que esto puede conseguirse mediante una conjugación del grupo, que Γ contiene un elemento primitivo de la forma $z \to z+1$, y que el recubrimiento universal $\pi : U \to U/\Gamma = S$ transforma las lineas verticales en U en geodésicas que emanan de p. Esto implica que un collar alrededor de p es la imagen mediante π de una región $\{0 \leq x < 1,\ y > \eta\}$ (para algún $\eta > 0$) en la que π es inyectiva. Un cálculo muestra que, para un β-collar, $\eta = 1/\beta$. Consultar los detalles en [Ber].

Se sabe [Kr, p.60-61] que existe un β-collar para todo $\beta \leq 1$.

Se puede elevar v a una función w en U:

$$w(x+iy) = \frac{\frac{1}{\alpha} - y}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}.$$

Entonces

$$\iint_{C_\beta(p)-C_\alpha(p)} |\nabla v|^2 = \int_0^1 \int_{1/\beta}^{1/\alpha} |\nabla w|^2\, dydx = \frac{1}{1/\alpha - 1/\beta} = \varepsilon. \qquad \#L1.5.$$

Comienza ahora la prueba del teorema B. Por hipótesis, se tiene que $b(S) > 0$. Sea G un dominio geodésico en S. Sean γ_j las geodésicas simples cerradas propias que acotan G donde $j = 1, ..., n$, y sean p_i las punturas "rodeadas" por G, $i = 1, ..., m$. Sea d una constante positiva fija.

Sea $\Omega_j = int\{p \in S - G : d_S(p, \gamma_j) \leq d\}$.

Sea H_k la componente conexa de $\cup_{j=1}^{n} \Omega_j$ que contiene a Ω_k. H_k puede escribirse como $H_k = \Omega_{k_1} \cup \Omega_{k_2} \cup ... \cup \Omega_{k_r}$. Sea u_k la función armónica que vale 1 en $\gamma_{k_1} \cup ... \cup \gamma_{k_r}$ y 0 en $E_k = \partial H_k - (\gamma_{k_1} \cup ... \cup \gamma_{k_r})$.

Sea Γ la colección de todas las curvas en H_k que unen E_k con $\gamma_{k_1} \cup ... \cup \gamma_{k_r}$.

El teorema 1.4 da

$$\frac{1}{\iint_{H_k} | \nabla u_k |^2 \, dA_S} = \lambda_{H_k}(\Gamma) = \sup_{\rho} \frac{L(\Gamma, \rho)^2}{A(H_k, \rho)} \geq \frac{L(\Gamma, \rho_S)^2}{A(H_k, \rho_S)} = \frac{d^2}{A_S(H_k)}.$$

La segunda igualdad es la definición de longitud extremal, donde el supremo se toma, como ya se ha dicho, sobre todas las métricas ρ en H_k, que son conformes con la métrica euclídea en cada carta local, o lo que es lo mismo, que son conformes con la métrica de Poincaré ρ_S en S, restringida a H_k.

Usando el lema 1.3 se obtiene

$$\iint_{H_k} | \nabla u_k |^2 \, dA_S \leq \frac{A_S(H_k)}{d^2} \leq \frac{A_S(\Omega_{k_1}) + ... + A_S(\Omega_{k_r})}{d^2} \leq \frac{senh(d)}{d^2}[L_S(\gamma_{k_1}) + ... + L_S(\gamma_{k_r})].$$

La función $g(d) = senh(d)/d^2$ alcanza su mínimo absoluto en el intervalo $(0, \infty)$ en el punto $d_0 = 1.915008...$ y $g_0 = g(d_0) < 0.9053$. Eligiendo $d = d_0$ se consigue

$$\sum_k \iint_{H_k} |\nabla u_k|^2 \leq g_0 \, L_S(\partial G),$$

donde por supuesto, cada componente conexa aparece una única vez en la suma.

Se quiere usar la desigualdad

$$0 < b(S) \leq \frac{\iint | \nabla f |^2}{\iint f^2}$$

para alguna f con soporte compacto.

Sería razonable definir f de la siguiente forma:

$$f = \begin{cases} 1 & \text{en } G \\ u_k & \text{en } H_k \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases}$$

pero f debe ser 0 en un entorno de las punturas; por tanto, habrá que definirla de una forma diferente alrededor de ellas. Se hará de la siguiente manera:

Existe un $\beta_0 < 1$ tal que $C_{\beta_0}(p_i) \subset G$ para todo i=1,...,m. Además, estos collares son disjuntos.

Si $\varepsilon \in (0, m\beta_0)$, entonces $C_{\varepsilon/m}(p_i)$ está contenido en G y $A_S(\cup_1^m C_{\varepsilon/m}(p_i)) = \varepsilon$.

Ahora puede usarse el lema 1.5 con $\beta = \varepsilon/m$, $\alpha = \beta/2 = \varepsilon/2m$, tomando v_i como en el lema y $v_i = 0$ en $C_\alpha(p_i)$.

Entonces

$$\iint_{C_\beta(p_i)} |\nabla v_i|^2 = \frac{\varepsilon}{m}.$$

Si

$$f = \begin{cases} 1 & \text{en } G - \cup_1^m C_\beta(p_i) \\ v_i & \text{en } C_\beta(p_i) \\ u_k & \text{en } H_k \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases}$$

entonces

$$b(S) \leq \frac{\iint |\nabla f|^2}{\iint f^2} \leq \frac{\varepsilon + g_0 L_S(\partial G)}{A_S(G) - \varepsilon}$$

para todo $\varepsilon < m\beta_0$. Por tanto

$$b(S) \leq g_0 \frac{L_S(\partial G)}{A_S(G)},$$

y (1.4) implica que

$$h(S) \leq 2 + \frac{g_0}{b(S)},$$

y ya que $b \leq 1/4$, se obtiene que

$$h(S)b(S) \leq \frac{1}{2} + g_0.$$

Por tanto

$$h(S)b(S) < \frac{3}{2}. \qquad \# \, TB.$$

SECCION I.2. Prueba del teorema A.

TEOREMA A. **Si una superficie de Riemann S_1 es bass y es cuasiconformemente equivalente a S_2, entonces S_2 es bass.**

Sea $f : S_1 \to S_2$ una aplicación k-cuasiconforme entre las superficies S_1 y S_2.

De momento se ha reducido el conjunto de los dominios iniciales $\mathcal{D}(S)$ para los que habría que comprobar que se verifica la desigualdad isoperimétrica, al subconjunto mucho menor y más manejable de los dominios geodésicos. El área en estos dominios, debido a que la curvatura es constante, es un invariante topológico, y si bien es cierto que una aplicación cuasiconforme puede distorsionar completamente las longitudes y que no conserva las geodésicas, el hecho de que la aplicación sea globalmente cuasiconforme va a hacer que prácticamente se conserven las longitudes de geodésicas equivalentes.

Se necesita el siguiente lema.

LEMA 2.1. **Sea α_1 un curva simple cerrada en S_1 y sea $\alpha_2 = f(\alpha_1)$. Sea a_i el ínfimo de las longitudes de todas las curvas cerradas libremente homótopas a α_i en S_i. Entonces**

$$\frac{a_2}{k} \leq a_1 \leq k a_2.$$

Demostración: Si a_i es 0, entonces cada α_i es homótopa a cero o "rodea" una puntura. Por tanto las a_i son cero simultáneamente, ya que f es un homeomorfismo que lleva punturas en punturas.

Por tanto puede suponerse que $a_1 a_2 > 0$.

Sea A_i la transformación de Möbius de Δ en Δ que representa a α_i, $i = 1, 2$. Entonces las A_i's son hiperbólicas, a_i= longitud de traslación de $A_i = \inf_{z \in \Delta} d_{\Delta}(z, A_i z)$, y A_1 y A_2 son conjugadas por un elevamiento $\tilde{f}$ de f ($\tilde{f} : \Delta \to \Delta$).

Sea Ω_i la superficie de Riemann cociente $\Delta/\langle A_i \rangle$, $i = 1, 2$. Entonces Ω_i es un anillo cuyo módulo es π/a_i. Por tanto, ya que $\tilde{f} : \Omega_1 \to \Omega_2$ está bien definida y es k-cuasiconforme, debe k-cuasiconservar los módulos, es decir,

$$\frac{\pi}{a_2} \leq k \frac{\pi}{a_1}.$$

La otra desigualdad es un corolario de ésta, ya que $f^{-1} : S_2 \to S_1$ también es una aplicación k-cuasiconforme. $\#L2.1.$

Si S_2 satisface la DIL, S_1 también debe satisfacerla: El lema 1.2. dice que basta con que exista una constante C_1 tal que si Ω_1 es un dominio geodésico en S_1, entonces

$$A_{S_1}(\Omega_1) \leq C_1 L_{S_1}(\partial\Omega_2).$$

Sean α_j, $j = 1, ..., n$ las curvas frontera de Ω_1 (α_j puede ser una puntura). Sea β_j, donde $j = 1, ..., n$, la curva más corta en la clase de homotopía libre de $f(\alpha_j)$. Entonces β_j es una geodésica simple cerrada. Si Φ es el dominio acotado por las β_j's, se tiene que $A_{S_2}(\Phi) = A_{S_1}(\Omega_1)$, por el teorema de Gauss-Bonnet. Pero

$$A_{S_2}(\Phi) \leq h_2 \sum_{j=1}^{n} L_{S_2}(\beta_j) \leq h_2 k L_{S_1}(\partial\Omega_1)$$

y por tanto S_1 satisface la DIL con constante h_1 que verifica

$$h_1 \leq 2 + h_2 k \leq 3h_2 k.$$

En particular,

$$b(S_1)^2 \leq Ck^2 b(S_2)$$

donde $C \leq 36(1/2 + g_0)^2 < 72$. #TA.

SECCION I.3. Prueba del teorema C.

TEOREMA C. **Supongamos que G es modulado y que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión (finita o infinita) separada en la métrica hiperbólica de G, es decir, que verifica**

$$\inf_{n\neq m} d_G(a_n, a_m) > 0.$$

Entonces el dominio $G_0 = G - \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es bass.

Sin pérdida de generalidad (ya que puede conseguirse aplicando una transformación de Möbius), se supone en esta sección que ∞ no está en G.

Sea t el ínfimo $t \equiv inf_{n\neq m} d_G(a_n, a_m)$.

En vez de demostrar que $b(G_0) > 0$, se probará que $h(G_0) \leq C$.

En esta sección, C será una constante que dependerá sólo de t y del módulo de G.

Sea $I = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

La prueba es fácil si $I = \emptyset$:

En [O] se prueba que

$$|\nabla log \lambda_G(z)| \leq \frac{2}{d(z, \partial G)}.$$

Ya que G es modulado, existe una constante $C_0 > 0$ tal que

$$\lambda_G(z) \geq \frac{C_0}{d(z, \partial G)}.$$

Por tanto $|\nabla log \lambda_G(z)| \leq C\lambda_G(z)$.

Se sabe que $\lambda_G^2 = \Delta log \lambda_G$, ya que la métrica conforme dada por $\lambda_G(z)|dz|$ tiene curvatura gaussiana -1. Si B pertenece a $\mathcal{D}(G)$, entonces, usando la fórmula de Green,

$$A_G(B) = \iint_B \lambda_G^2(z)dxdy = \iint_B \Delta log \lambda_G(z)dxdy = \int_{\partial B} < \nabla log \lambda_G(z), \vec{n} > |dz|$$

donde $\vec{n}$ es la normal unitaria exterior a ∂B, y el laplaciano, el gradiente y el producto escalar son todos euclídeos.

Y así

$$A_G(B) \leq \int_{\partial B} |\nabla log \lambda_G(z)||dz| \leq C \int_{\partial B} \lambda_G(z)\,|dz| = CL_G(\partial B).$$

Por tanto G verifica la DIL con $h(G) \leq 2/C_0$.

La idea de la prueba si $I \neq \emptyset$ es dividir G en dos partes: la primera parte estará "lejos" de I y entonces $\lambda_{G_0} \sim \lambda_G$; la segunda parte consistirá de trozos que "rodearán" I y entonces $\lambda_{G_0} \sim \lambda_{\Delta^*}$ en cada trozo. El entorno de I se elegirá de tal forma que las constantes que aparezcan en las estimaciones sean universales.

LEMA 3.1. **Si $S = G - \cup_{n=1}^{\infty} \Delta(a_n, \frac{\varepsilon}{2} d(a_n, \partial G))$ con $\varepsilon > 0$, entonces**

$$\lambda_G(z) \leq \lambda_{G_0} \leq C \lambda_G(z)$$

para todo $z \in S$.

Demostración: Ya que $G_0 \subset G$, $\lambda_G(z) \leq \lambda_{G_0}(z)$ para todo $z \in G_0$.
Sea $z \in S$. Es fácil comprobar que

$$| z - a | \geq \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} d(z, \partial G), \qquad \forall a \in I.$$

Por tanto $d(z, \partial G_0) = d(z, I \cup \partial G) \geq \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} d(z, \partial G)$.
Y esto, junto con el lema de Schwarz, da finalmente

$$\lambda_{G_0}(z) \leq \frac{2}{d(z, G_0)} \leq \frac{2(2+\varepsilon)}{\varepsilon d(z, G)} \leq \frac{2(2+\varepsilon)}{\varepsilon C_0} \lambda_G(z). \qquad \#L3.1.$$

LEMA 3.2. **Los discos $\{\Delta(a_n, \varepsilon d(a_n, \partial G))\}_{n \geq 1}$ son disjuntos si $\varepsilon = \frac{t}{4+2t}$. Además, si $K = e^{4.76}$ y $z \in \overline{\Delta}(a, \varepsilon d(a, \partial G))$ donde $a \in I$, entonces**

$$\lambda_{\Delta(a, K d(a, \partial G))^*}(z) \leq \lambda_{G_0}(z) \leq \lambda_{\Delta(a, 2\varepsilon d(a, \partial G))^*}(z).$$

Demostración: Supongamos que existen $m, n \, (m \neq n)$ tales que

$$| a_n - a_m | < 2\varepsilon d(a_n, \partial G).$$

Sea γ el segmento rectilíneo que une a_n con a_m; si $z \in \gamma$

$$d(a_n, \partial G) \leq | a_n - z | + d(z, \partial G) < 2\varepsilon d(a_n, \partial G) + d(z, \partial G),$$

y entonces

$$d(a_n, \partial G) < \frac{1}{1 - 2\varepsilon} d(z, \partial G).$$

Se sigue que

$$d_G(a_n, a_m) \leq \int_\gamma \lambda_G(z) \, |dz| \leq \int_\gamma \frac{2 \, |dz|}{d(z, \partial G)} \leq \frac{2}{1 - 2\varepsilon} \int_\gamma \frac{|dz|}{d(a_n, \partial G)}$$

y por tanto

$$d_G(a_n, a_m) \leq \frac{2\,|a_n - a_m|}{(1-2\varepsilon)d(a_n, \partial G)} < \frac{4\varepsilon}{1-2\varepsilon} = t,$$

lo cual contradice la definición de t.

Por tanto, los discos $\{\Delta(a_n, \varepsilon d(a_n, \partial G))\}_{n\geq 1}$ son disjuntos.

La segunda desigualdad es entonces obvia, ya que $\Delta(a, 2\varepsilon d(a, \partial G))^* \subset G_0$.

La primera desigualdad se deduce del teorema de Beardon y Pommerenke de la introducción [B-P]:

$\beta_{G_0}(z)$ se define como

$$\beta_{G_0}(z) = inf\left\{\left|log\frac{|z-a|}{|b-a|}\right| : a, b \in \partial G_0,\ |z-a| = d(z, \partial G_0)\right\}.$$

Si $z \in \overline{\Delta}(a, \varepsilon d(a, \partial G))$, se tiene que $|z-a| = d(z, \partial G_0)$, ya que $\varepsilon < 1/2$ y que se verifica $|a-c| \geq 2\varepsilon\, d(a, \partial G)$ para todo $c \in I$. Conviene elegir como b un punto de ∂G tal que $d(a, \partial G) = d(a, b)$. Entonces

$$\beta_{G_0}(z) \leq log\frac{d(a, \partial G)}{|z-a|}$$

y como

$$1 \leq \lambda_{G_0}(z)\, d(z, \partial G_0)\,(4.76 + \beta_{G_0}(z)),$$

se tiene que

$$\lambda_{G_0}(z) \geq \frac{1}{|z-a|\, log\frac{Kd(a,\partial G)}{|z-a|}} = \lambda_{\Delta(a, Kd(a,\partial G))^*}(z). \qquad \#L3.2.$$

Ahora puede comenzarse la prueba del teorema C.

Sea D un dominio relativamente compacto en G_0 con $\partial D = \beta \cup \beta_1 \cup \ldots \cup \beta_k \cup \beta^1 \cup \ldots \beta^l$.

Las β, β_j, β^i son curvas de Jordan, que pueden suponerse disjuntas. Además, β es la componente conexa exterior de ∂D, las β_j no son homótopas a cero en G, y las β^i son homótopas a cero en G, con $\beta^i = \partial B^i$ donde B^i es un dominio de Jordan cerrado en G.

Si $B = D \cup \{\cup_{i=1}^{l} B^i\} - I$ entonces las curvas frontera de B son $\beta \cup \beta_1 \cup \ldots \cup \beta_k$. Basta con demostrar que

$$A_{G_0}(B) \leq C L_{G_0}(\partial B),$$

ya que se ha aumentado el área y disminuido la longitud.

Sea $d_n \equiv d(a_n, \partial G)$ y defínanse

$$I_B \equiv \{a_n : B \cap \Delta(a_n, \frac{\varepsilon}{2} d_n) \neq \emptyset\},$$

$$I_1 \equiv \{a_n : \partial B \cap \Delta(a_n, \frac{\varepsilon}{2} d_n)^* \neq \emptyset\},$$

$$I_2 \equiv \{a_n : \Delta(a_n, \frac{\varepsilon}{2} d_n)^* \subset B\}.$$

Obsérvese que $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ y que $I_1 \cup I_2 = I_B$.

El lema 3.2 implica que

$$d_{G_0}(\{|z - a_n| = \varepsilon d_n/2\}, \{|z - a_n| = \varepsilon d_n\}) \geq d_{\Delta(a_n, K d_n)^*}(\{\}, \{\}) = log \frac{log \frac{2K}{\varepsilon}}{log \frac{K}{\varepsilon}} \equiv \alpha.$$

Se distinguen dos casos:

Caso 1. $L_{G_0}(\partial B \cap \Delta(a_n, \varepsilon d_n)^*) < \alpha$ para algún $a_n \in I_1$.

Ya que $d_{G_0}(\{|z - a_n| = \varepsilon d_n/2\}, \{|z - a_n| = \varepsilon d_n\}) \geq \alpha$, $\partial B \cap \Delta(a_n, \varepsilon d_n)^*$ contiene una curva frontera γ de B. Entonces γ es una β_j ó $\gamma = \beta$. Además, γ no puede ser una β_j ya que $\gamma \subset \Delta(a_n, \varepsilon d_n)$ y por tanto es homótopa a cero en G. Entonces $\gamma = \beta$ y se concluye que $B \subset \Delta(a_n, \varepsilon d_n)^*$ y B es simple o doblemente conexo. Por el lema 1.1,

$$A_{G_0}(B) \leq L_{G_0}(\partial B).$$

Caso 2. $I_1 = \emptyset$ ó $L_{G_0}(\partial B \cap \Delta(a_n, \varepsilon d_n)^*) \geq \alpha$ para todo $a_n \in I_1$.

Se tiene

$$(3.1) \quad A_{G_0}(B) \leq A_{G_0}(B \cap S) + \sum_{a_n \in I_2} A_{G_0}(\Delta(a_n, \varepsilon d_n/2)^*) + \sum_{a_n \in I_1} A_{G_0}(\Delta(a_n, \varepsilon d_n/2)^*).$$

Se tratará cada sumando de forma independiente.

Primero, $A_{G_0}(B \cap S) \leq C A_G(B \cap S)$ por el lema 3.1.

Usando el lema 3.2, se obtiene que

$$A_{G_0}(\Delta(a_n, \varepsilon d_n/2)^*) \leq A_{\Delta(a_n, 2\varepsilon d_n)^*}(\Delta(a_n, \varepsilon d_n/2)^*) = A_{\Delta^*}(\Delta(0, 1/4)^*) = C,$$

y por otra parte se tiene que

$$A_G(\Delta(a_n, \varepsilon d_n/2)) \geq \iint_{\Delta(a_n, \varepsilon d_n/2)} \frac{C_0^2 dxdy}{d(z, \partial G)^2} \geq C.$$

Todo esto da

$$A_{G_0}(\Delta(a_n,\varepsilon d_n/2)^*) \leq C A_G(\Delta(a_n,\varepsilon d_n/2)).$$

Entonces

$$A_{G_0}(B\cap S)+\sum_{a_n\in I_2} A_{G_0}(\Delta(a_n,\varepsilon d_n/2)^*) \leq C A_G(B\cap S)+C\sum_{a_n\in I_2} A_G(\Delta(a_n,\varepsilon d_n/2)) \leq$$

$$\leq C A_G(B) \leq C L_G(\partial B) \leq C L_{G_0}(\partial B). \tag{3.2}$$

Por último se tratará el tercer término. Del lema 3.2 se deduce que

$$A_{G_0}(\Delta(a_n,\varepsilon d_n/2)^*) \leq C.$$

Como $a_n \in I_1$, se tiene que

$$A_{G_0}(\Delta(a_n,\varepsilon d_n/2)^*) \leq \frac{C}{\alpha} L_{G_0}(\partial B\cap \Delta(a_n,\varepsilon d_n)^*)$$

y por tanto

$$\sum_{a_n\in I_1} A_{G_0}(\Delta(a_n,\varepsilon d_n/2)^*) \leq C\sum_{a_n\in I_1} L_{G_0}(\partial B\cap\Delta(a_n,\varepsilon d_n)^*) \leq C L_{G_0}(\partial B), \tag{3.3}$$

ya que los discos $\{\Delta(a_n,\varepsilon d_n)\}_{n\geq 1}$ son disjuntos.

Juntando (3.1), (3.2) y (3.3) se obtiene

$$A_{G_0}(B) \leq C L_{G_0}(\partial B). \quad \#TC.$$

SECCION I.4. Prueba del teorema D.

TEOREMA D. **Supóngase que H es un dominio plano que no es bass y que $\infty \in H$. Entonces $\hat{\mathbb{C}}-H$ es una unión disjunta $P \cup I$, donde I es el conjunto de todos los puntos aislados de ∂H. Los puntos de I están separados en la métrica hiperbólica de $\hat{\mathbb{C}}-P = H \cup I$ y existen constantes c_1 y c_2 tales que si $p \in P$, entonces**

$$\beta(p,r) \geq c_1$$

o

$$\alpha(p, r\beta(p,r)) \geq c_2$$

donde α y β se consideran con $B = P$.

Además *cap* $(\Delta(p,r) \cap P) > 0$ **para cada** $p \in P$ **y cada** $r > 0$.

LEMA 4.1. **Sea E un conjunto compacto, $E \subset \overline{\Delta}$, con $\{0,1\} \subset E$ y $cap E \leq \varepsilon$. Existe una constante universal C tal que si $R > 2$ entonces**

$$b(\Delta_R - E) \leq C\left(\frac{1}{log\frac{1}{\varepsilon}} + \frac{1}{log\frac{R}{2}}\right).$$

Demostración: Se puede encontrar un abierto A con frontera C^{∞} que contiene a E, y tal que si u es la función armónica en $\Delta_2 - \overline{A}$ con valores frontera

$$\begin{cases} u = 0 & \text{en } \partial A \\ u = 1 & \text{si } |z| = 2 \end{cases}$$

entonces

$$\iint |\nabla u|^2 \leq \frac{C}{log\frac{1}{\varepsilon}} \quad \text{y} \quad u(z) \geq \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad |z| \geq \frac{3}{2},$$

donde C es una constante absoluta.

Una posible elección para tal u es la siguiente:

Se reescala todo para que Δ_2 pase a ser Δ, y se considera $U(z)$ el potencial conductor hiperbólico de $\frac{1}{2}E$, donde el $\frac{1}{2}$ se debe al cambio de escala (ver [Ts, p.94] para las definiciones relacionadas con la capacidad hiperbólica). U es armónica en $\Delta - \frac{1}{2}E$, $U = 0$ en $\partial\Delta$ y $U = V_h$ en $\frac{1}{2}E$ (salvo un conjunto de capacidad cero), donde $V_h \equiv -log\, cap_h(\frac{1}{2}E)$. Si $r \in [0, V_h)$, la "curva" de nivel $C_r \equiv \{ z \in \Delta : U(z) = r \}$, que es la frontera del abierto

$D_r \equiv \{ z \in \Delta : U(z) > r \}$ que contiene a E, es una unión finita de curvas de Jordan analíticas, y se tiene [Ts, p.237] que

$$\int_{C_r} \frac{\partial U}{\partial n} |dz| = 2\pi.$$

Como U es armónica en $\Delta - D_r$, la fórmula de Green da la igualdad

$$\iint_{\Delta - D_r} |\nabla U|^2 = \int_{\partial\Delta \cup C_r} U \frac{\partial U}{\partial n} = \int_{C_r} r \frac{\partial U}{\partial n} = 2\pi r.$$

Por tanto, si se toman $A \equiv 2D_r$ y $u(z) \equiv 1 - r^{-1} U(z/2)$, para un r próximo a V_h, se tiene que

$$\iint_{\Delta_2 - \overline{A}} |\nabla u|^2 = \iint_{\Delta - D_r} \frac{1}{r^2} |\nabla U|^2 = \frac{2\pi}{r},$$

y ya que $\frac{1}{2}E$ está contenido en $\overline{\Delta_{1/2}}$, también se tiene que $cap_h(\frac{1}{2}E) \leq cap\, E$.

Sea R_0 un número positivo menor que R.

Sea V una función definida en $\Delta_R - E$ de la siguiente manera:

$$V = \begin{cases} u & \text{en } \Delta_2 - A \\ 1 - \dfrac{log(|z|/2)}{log(R_0/2)} & \text{si } 2 \leq |z| \leq R_0 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Claramente

$$|\nabla V|^2 = \begin{cases} |\nabla u|^2 & \text{en } \Delta_2 - A \\ |z|^{-2} (log(R_0/2))^{-2} & \text{si } 2 < |z| < R_0 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Esto implica que

$$\iint_{\Delta_R - E} |\nabla V|^2 = \iint_{\Delta_2 - A} |\nabla u|^2 + \iint_{2<|z|<R_0} \frac{1}{|z|^2 (log \frac{R_0}{2})^2},$$

$$\iint_{\Delta_R - E} |\nabla V|^2 \leq \frac{C}{log \frac{1}{\epsilon}} + \frac{2\pi}{log \frac{R_0}{2}},$$

y además

$$\iint_{\Delta_R - E} V^2 \lambda^2_{\Delta_R - E} \geq \iint_{3/2<|z|<2} u^2 \lambda^2_{\Delta_R - E} \geq \frac{1}{4} A_{\Delta_R - E}(\{3/2 < |z| < 2\}),$$

$$\iint_{\Delta_R - E} V^2 \lambda^2_{\Delta_R - E} \geq \frac{1}{4} A_{\mathbf{C} - \{0,1\}}(\{3/2 < |z| < 2\}) = C.$$

Por tanto

$$\delta(\Delta_R - E) \leq \frac{\iint |\nabla V|^2}{\iint V^2\lambda^2} \leq C\left(\frac{1}{log\frac{1}{\varepsilon}} + \frac{1}{log\frac{R_0}{2}}\right)$$

para cada $R_0 < R$, por lo que

$$\delta(\Delta_R - E) \leq C\left(\frac{1}{log\frac{1}{\varepsilon}} + \frac{1}{log\frac{R}{2}}\right). \qquad \#L4.1.$$

En [Fe2] se probó que si $E = \{a, b\}$ y $t = d_\Delta(a, b)$, entonces $\delta(\Delta - E) \leq \alpha(t)$, donde α es una función que tiende a 0 cuando t tiende a 0. Como consecuencia del lema 4.1, se tiene un resultado bastante más general:

TEOREMA K. **Sea E un compacto contenido en $\overline{\Delta}_r$, donde $0 < r < 1$. Supóngase que $\{0, r\} \subset E$ y que además $\frac{cap E}{r} \leq \varepsilon$. Entonces**

$$\delta(\Delta - E) \leq C\left(\frac{1}{log\frac{1}{\varepsilon}} + \frac{1}{log\frac{1}{2r}}\right).$$

COROLARIO 4.2. **Sea E un compacto contenido en $\overline{\Delta}_r$, donde $0 < r < 1$. Supóngase que 0 pertenece a E, $E \neq \{0\}$ y $cap E = 0$. Entonces**

$$\delta(\Delta - E) \geq 1 - \frac{C}{log\frac{1}{2r}} \qquad \textbf{si} \quad r < r_0.$$

COROLARIO 4.3. **Si $a, b \in \Delta$, entonces**

$$\delta(\Delta - \{a, b\}) \geq 1 - h(d_\Delta(a, b)) \qquad \textbf{si} \quad d_\Delta(a, b) < d_0,$$

donde $h(t) = \frac{C}{log(\frac{1}{2}cotanh\frac{t}{2})}$.

Para comprobar este corolario, basta considerar la transformación de Möbius T, que conserva Δ, y tal que $Ta = 0$ y $Tb = tanh(\frac{1}{2}d_\Delta(a, b))$, por ser δ un invariante conforme.

El siguiente lema será usado frecuentemente, ya que permitirá "pegar" partes de la frontera manteniendo δ bajo control.

LEMA 4.4. **Sea Ω un dominio en la esfera de Riemann. Si G es un conjunto cerrado y conexo tal que $G \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ y Ω_0 es una componente conexa de $\Omega - G$, entonces**

$$\delta(\Omega) \geq \delta(\Omega_0).$$

Demostración: Si γ es una curva cerrada no homótopa a cero en Ω_0, entonces no puede ser homótopa a cero en Ω. Si lo fuese, tendría que rodear parte de G, y como G es conexo, γ rodearía todo G; pero como $G \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, γ rodearía parte de $\partial\Omega$, lo cual es una contradicción. Por tanto, hay más clases de homotopía en Ω, además de haber más curvas.

También se tiene, ya que la inclusión de Ω_0 en Ω es una aplicación holomorfa, que las distancias en Ω_0 son mayores que en Ω.

Juntando ambos hechos, se deduce que la función U_t correspondiente a Ω_0 es menor o igual que la correspondiente a Ω.

Ver [Ca1, T5.1] para una prueba alternativa. $\#L4.4.$

LEMA 4.5. **Sea E un conjunto compacto infinito contenido en el plano y con $cap\, E = 0$. Sea Ω un subdominio de la esfera de Riemann, que incluso puede ser toda la esfera, que contiene a E. Entonces**

$$\delta(\Omega - E) = 1.$$

Demostración: El teorema de Cantor-Bendixon (ver, por ejemplo, [Ku, p.183]) implica que $E = Q \cup R$ donde Q es el subconjunto perfecto maximal de E y R es un conjunto numerable.

Se distinguen dos casos:

Caso (A): $Q = \emptyset$.

Entonces $E = R$ es un conjunto cerrado numerable.

Sea $E = E^d \cup E^a$. Veamos, antes que nada, que E^d y E^a son ambos distintos del vacío.

Si $E^a = \emptyset$, entonces E $(= E^d)$ es un conjunto perfecto. Se sigue de aquí que $E \subset Q = \emptyset$ lo cual contradice que E sea infinito.

Si $E^d = \emptyset$, entonces E $(= E^a)$ es un conjunto compacto discreto. Por tanto, ha de ser finito contradiciendo la hipótesis de partida.

Ahora, sea $E^d = (E^d)^d \cup (E^d)^a$. Obsérvese que $(E^d)^a$ es distinto del vacío, ya que si $(E^d)^a = \emptyset$, entonces $E^d (= (E^d)^d)$ es un conjunto perfecto. Se tiene entonces $E^d \subset Q = \emptyset$ que contradice $E^d \neq \emptyset$.

Si e pertenece a $(E^d)^a$, existe un $r > 0$ tal que $\Delta(e, 2r) \cap E^d = \{e\}$, $\Delta(e, r) \subset \Omega$ y $E \cap \Delta(e, r)^c \neq \emptyset$. Ya que e pertenece a E^d, se tiene que $\Delta(e, r) \cap E = \{e\} \cup \{a_n\}_n$ con $a_n \in E^a$ y $a_n \to e$.

Sea $G = \Delta(e,r)^c$ con la notación del lema 4.4. Si definimos $B \equiv \{e\} \cup \{a_n\}_n$, dicho lema asegura que

$$\delta(\Omega - E) \geq \delta(\Delta(e,r) - B).$$

En [Pa, T4.1] se prueba que si S es una superficie de Riemann hiperbólica y A es un subconjunto discreto de S, entonces

$$\delta(S - A) \geq \delta(S).$$

Se sigue que

$$\delta(\Delta(e,r) - B) \geq \delta(\Delta(e,r) - \{e, a_n\}) = \delta\left(\Delta - \left\{0, \frac{a_n - e}{r}\right\}\right).$$

El corolario 4.2 implica que

$$\delta\left(\Delta - \left\{0, \frac{a_n - e}{r}\right\}\right) \geq 1 - \frac{C}{log\frac{r}{2|a_n - e|}}.$$

Entonces

$$\delta(\Omega - E) \geq 1 - \frac{C}{log\frac{r}{2|a_n - e|}},$$

para cada n.

Y por tanto el lema está probado en este caso.

Caso (B): $Q \neq \emptyset$.

El conjunto Q no es uniformemente perfecto porque $cap Q = 0$. Se sigue que si k es un número natural mayor que 1, existen un punto a_k en Q y un número positivo r_k tales que B_k separa Q, donde B_k es el anillo

$$\left\{z : \frac{r_k}{k} \leq |z - a_k| \leq kr_k\right\} \subset \Omega.$$

Esto no es más que una cuantificación del hecho de que existen anillos B_k de módulo arbitrariamente grande contenidos en $\hat{\mathbb{C}} - Q$ y que separan Q, que es la última caracterización de los conjuntos uniformemente perfectos definidos en la introducción de este capítulo.

El hecho de que puedan elegirse los anillos B_k contenidos en Ω, en el caso de que Ω sea un subdominio propio de la esfera, es debido a que al estar Q contenido en el compacto E, su diámetro es finito y la distancia de E a $\partial\Omega$ es positiva. Ya que B_k debe separar Q, kr_k tiene que ser siempre menor que el diámetro de Q. Esto permite decir que r_k se hace muy pequeño y que por tanto, puede tenerse, quizás eligiendo una subsucesión, la desigualdad $kr_k < d(a_k, \partial\Omega)$.

Obssévese que $E \cap B_k (= R \cap B_k)$ es un conjunto cerrado numerable. Se sigue que existen s_k, t_k con $s_k \in [r_k/k, r_k/\sqrt{k}]$, $t_k \in [\sqrt{k}r_k, kr_k]$, tales que

$$\{|z - a_k| = s_k\} \cap E = \emptyset \qquad \text{y} \qquad \{|z - a_k| = t_k\} \cap E = \emptyset.$$

Si A_k es el anillo $\{s_k \le |z - a_k| \le t_k\}$, entonces $A_k \cap Q = \emptyset$ y $A_k \cap E (= A_k \cap R)$ es un cojunto compacto contenido en el interior de A_k.

Si $A_k \cap E$ es infinito para algún k, entonces puede aplicarse el caso (A), usando dos veces seguidas el lema 4.4 con G igual respectivamente a $\Delta(a_k, t_k)^c$ y a $\overline{\Delta}(a_k, s_k)$.

Por consiguiente, podemos suponer que $A_k \cap E$ es finito para todo $k > 1$. El lema 4.4 implica que

$$\delta(\Omega - E) \ge \delta(\Delta(a_k, t_k) - E).$$

Aplicando de nuevo el teorema de Patterson junto con el corolario 4.2, se obtiene que

$$\delta(\Omega - E) \ge \delta(\Delta(a_k, t_k) - \{E \cap \Delta(a_k, s_k)\}) \ge 1 - \frac{C}{log \frac{t_k}{2s_k}},$$

lo que implica que

$$\delta(\Omega - E) \ge 1 - \frac{C}{log(k/2)} \qquad \text{para todo} \quad k > 1,$$

y entonces

$$\delta(\Omega - E) = 1. \qquad \#L4.5.$$

Ahora puede comenzarse la prueba del teorema D.

Sea $P = \hat{\mathbb{C}} - \{H \cup I\}$, donde I es el conjunto de los puntos aislados de ∂H.

Obsérvese que P es distinto del vacío:

Si P fuese vacío entonces H sería la esfera de Riemann menos un número finito de puntos, pero esta posibilidad está descartada ya que $\delta(H) < 1$.

Además, se probará que

$$cap(\Delta(p, r) \cap P) > 0 \qquad \text{para cada } p \in P \text{ y } r > 0.$$

Si se supone que esto no es cierto, existen $p \in P$ y $r > 0$ tales que se verifica que $cap(\Delta(p, r) \cap P) = 0$. Para simplificar la notación, puede suponerse que $p = 0$ y $r = 1$, y por tanto $cap(\Delta \cap P) = 0$.

Sea R el conjunto $\{s \in (0,1) : \{|z| = s\} \cap (P \cup I) \neq \emptyset\}$. R es un conjunto cerrado en (0,1) y $cap R = 0$. Por tanto existen $s \in (0,1)$ y $\varepsilon > 0$ tales que $R \cap [s - \varepsilon, s] = \emptyset$ y $(P \cup I) \cap \Delta_s^c \neq \emptyset$.

Entonces el conjunto E definido como $E = \Delta_s \cap (P \cup I) = \Delta_{s-\epsilon} \cap (P \cup I)$ es un conjunto compacto en Δ_s y $cap\, E = 0$. Obsérvese que E es infinito ya que $p \notin I$.

Por tanto, usando los lemas 4.4 y 4.5, se deduce que

$$\delta(H) \geq \delta(\Delta_s - E) = 1,$$

lo cual contradice $\delta(H) > 0$.

Se concluye que $cap(\Delta(p,r) \cap P) > 0$ para cada $p \in P$ y para cada $r > 0$.

El siguiente paso será comprobar que los puntos de I están separados en $\hat{\mathbf{C}} - P$. Sea q un punto fijo de H.

Sea F un recubrimiento universal $F : \Delta \longrightarrow \hat{\mathbf{C}} - P$ tal que $F(0) = q$.

Se define $J = F^{-1}(I)$ y sea G un recubrimiento universal $G : \Delta \longrightarrow \Delta - J$ tal que $G(0) = 0$.

Entonces $\Pi = F \circ G : \Delta \rightarrow H$ es un recubrimiento universal de H y $\Pi(0) = q$.

Sea T una isometría de Δ. Si $G \circ T = G$, entonces $\Pi \circ T = \Pi$.

Se sigue que el grupo $\mathcal{G}(G)$ de transformaciones recubridoras de G forma un subgrupo de $\mathcal{G}(\Pi)$, las transformaciones recubridoras de Π. Por tanto

$$\sum_{T \in \mathcal{G}(G)} \left(\frac{1 - |T(0)|}{1 + |T(0)|} \right)^t \leq \sum_{T \in \mathcal{G}(\Pi)} \left(\frac{1 - |T(0)|}{1 + |T(0)|} \right)^t,$$

de donde se deduce que $\delta(\Delta - J) \leq \delta(H) < 1$.

Si i, j pertenecen a I, entonces existen k, l pertenecientes a J tales que se vefifica que $d_\Delta(k,l) = d_{\hat{\mathbf{C}}-P}(i,j)$. Luego usando el teorema de Patterson y el corolario 4.3

$$\delta(H) \geq \delta(\Delta - J) \geq \delta(\Delta - \{k,l\}) \geq 1 - h(d_\Delta(k,l)).$$

Por tanto

$$d_{\hat{\mathbf{C}}-P}(i,j) \geq 2Argtanh \left(\frac{1}{2} exp \left(\frac{-C}{1 - \delta(H)} \right) \right).$$

Finalmente se prueban las acotaciones de α y β.

Tómense $p \in P$ y $0 < r \leq \frac{1}{2} diam\, P$. Sea $\beta = \beta(p,r)$.

Sea $C_1 < 1/4$ una constante tal que si $\beta < 2C_1$ entonces $\frac{C}{log(1/2\beta)} < \frac{1}{2}\delta(H)$, donde C es la constante que aparece en el lema 4.1.

Si $\beta < 2C_1$, entonces

$$\overline{\Delta}(p, r\beta) \cap P = \Delta(p,r) \cap P, \qquad \text{y} \quad r\beta < \frac{r}{2}.$$

Ya que $cap(\Delta(p,r) \cap P) > 0$ (obsérvese que $\Delta(p,r) \cap P$ tiene al menos dos puntos), usando el lema 4.1 se obtiene que:

$$b(\Delta(p,r)-P) \leq C\left(\frac{1}{\log\frac{r\beta}{cap(P\cap\Delta(p,r))}}+\frac{1}{\log\frac{1}{2\beta}}\right).$$

Ahora pueden aplicarse el lema 4.4 y el teorema de Patterson para ver que

$$\delta(H) \geq \delta(H \cap \Delta(p,r)) = \delta(\Delta(p,r)-(P\cup I)) \geq \delta(\Delta(p,r)-P).$$

Obsérvese que la primera desigualdad es cierta gracias a que $r \leq \frac{1}{2} diam\, P$, lo cual implica que $\Delta(p,r)^c \cap \partial H \neq \emptyset$. De aquí se deduce que

$$b(H) \leq b(\Delta(p,r)-P) < \frac{C}{\log\frac{r\beta}{cap(P\cap\Delta(p,r))}}+\frac{1}{2}b(H).$$

Por tanto

$$b(H) < \frac{2C}{\log\frac{r\beta}{cap(P\cap\Delta(p,r))}},$$

y entonces

$$\frac{cap(P\cap\Delta(p,r))}{r\beta} > exp\left(\frac{-2C}{b(H)}\right) \equiv C_2.$$

Se sigue que

$$\frac{cap(\overline{\Delta}(p,r\beta)\cap P)}{r\beta} > C_2,$$

es decir

$$\alpha(p, r\beta(p,r)) > C_2.$$

Considérese ahora el caso $\frac{1}{2} diam\, P < r \leq diam\, P$.

Si $\beta(p,r) < C_1 (< 1/4)$ entonces $r\beta(p,r) = \frac{r}{2}\beta(p,\frac{r}{2})$ y $\beta(p,\frac{r}{2}) = 2\beta(p,r) < 2C_1$.

Se sigue que

$$\frac{cap(\overline{\Delta}(p,r\beta(p,r))\cap P)}{r\beta(p,r)} = \frac{cap(\overline{\Delta}(p,\frac{r}{2}\beta(p,\frac{r}{2}))\cap P)}{\frac{r}{2}\beta(p,\frac{r}{2})} > C_2,$$

es decir

$$\alpha(p, r\beta(p,r)) > C_2.$$

Esto termina la prueba. $\#TD$.

SECCION I.5. Ejemplos.

En esta sección vamos a construir los ejemplos anunciados en la introducción.

Ejemplo 1. Este ejemplo muestra que la condición del teorema C no es necesaria. Para ello se construye un dominio plano R que no es bass y que no verifica las hipótesis del teorema C. De hecho, R no tiene punturas y no es modulado.

Sean los conjuntos $A \equiv \{ z = x + iy \in U \cap \partial\Delta : |x| \geq \varepsilon \}$, $B_1 \equiv \{\varepsilon\} \times [7/8, 9/8]$, y $B_1 \equiv \{-\varepsilon\} \times [7/8, 9/8]$.

Sean ahora $C_0 \equiv A \cup B_1 \cup B_2$ y C_n la imagen de C_0 mediante la traslación $T_n z = z + 2n$. Si definimos

$$\Omega \equiv U - \cup_{n=0}^{\infty} C_n,$$

Ω es un dominio plano simplemente conexo, y R puede definirse como

$$R \equiv \Omega - \cup_{n=0}^{\infty} D_n,$$

donde $D_n \equiv \Delta(2n + \frac{i}{2}, \frac{1}{4+n})$.

Como los anillos $A_n \equiv \{1/(4+n) < |z - 2n - i/2| < 7/8\}$ separan la frontera de R y tienen módulo $\frac{1}{2\pi} log \frac{7(4+n)}{8}$, entonces R no es modulado.

Para ver que R satisface la DIL, basta con elegir un ε suficientemente pequeño como para que el "pasillo" $P_n \equiv (2n - \varepsilon, 2n + \varepsilon) \times (7/8, 9/8)$ sea tan "estrecho" que permita hacer lo siguiente:

Dado G un dominio de $\mathcal{D}(R)$ que rodea $D_{n_1}, ..., D_{n_r}$, se pueden trazar curvas $\gamma_1, ..., \gamma_r$ tales que γ_j esté contenida en P_j, $L_R(\gamma_j) \leq C\, L_R(\partial G \cap P_j)$, para una constante universal C, por lo que

$$L_R(\gamma_1) + ... + L_R(\gamma_r) \leq C\,(L_R(\partial G \cap P_1) + ... + L_R(\partial G \cap P_r)) \leq C\, L_R(\partial G),$$

y tales que $G - \{\gamma_1, ..., \gamma_r\}$ tenga $r + 1$ componentes conexas: $G_0, G_1, ..., G_r$, donde G_0 no rodea ningún D_n y G_j rodea D_{n_j}. Entonces existe una constante C_1 tal que

$$A_R(G_0) \leq C_1\, L_R(\partial G)$$

y

$$A_R(G_1) + ... + A_R(G_r) \leq C_1\, L_R(\partial G).$$

La desigualdad para G_0 se tiene ya que, en la región en que está G_0, las métricas de R y Ω son comparables, y Ω es simplemente conexo, por lo que $h(\Omega) = 1$.

La segunda desigualdad se deduce del hecho de que, en la región en que está G_j, las métricas de R y $\Omega_j \equiv \Omega - D_{n_j}$ son comparables, y Ω_j es doblemente conexo, por lo que $h(\Omega_j) = 1$.

Ejemplo 2. Este ejemplo muestra que la conclusión del teorema D no implica que un dominio de la esfera no sea bass. Para ello se construye un dominio S de la siguiente manera:

Sea E_n un subconjunto de la circunferencia C_n de centro 0 y radio 2^{-n}. Si n es par, E_n es un conjunto de N_n arcos equidistribuidos sobre C_n y de argumento θ_n cada uno. Si n es impar, E_n es toda la circunferencia C_n salvo la zona $\{|arg\, z| < N_n^{-1}\}$. Entonces S se define como

$$S \equiv \hat{\mathbb{C}} - \{0\} - \cup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Para ver que S no satisface la DIL, pueden considerarse los dominios D_n, construidos de la siguiente manera:

Dado un n par, sea σ_j, para $j = 1, 2$, la geodésica en la clase de homotopía libre de las circunferencias comprendidas entre C_{n+j-2} y C_{n+j-1}.

Sean ahora $\gamma_1, ..., \gamma_{N_n}$ las geodésicas que rodean cada uno de los N_n arcos situados sobre la circunferencia C_n.

$\sigma_1, \sigma_2, \gamma_1, ..., \gamma_{N_n}$ limiltan un dominio geodésico D_n en S, que en virtud del teorema de Gauss-Bonnet y de que S tiene curvatura constante -1, tiene área $2\pi N_n$.

Si A_j es el anillo $A_j \equiv \{2^{-n-j+1} < |z| < 2^{-n-j+2}\}$ y η_j es la geodésica en A_j definida como $\eta_j \equiv \{|z| = \sqrt{2^{-2n-2j+3}}\}$, se tiene que

$$L_S(\sigma_j) \leq L_S(\eta_j) \leq L_{A_j}(\eta_j) = \frac{2\pi^2}{log\, 2}.$$

Usando de nuevo el truco de los anillos, puede verse que si $N_n\theta_n$ tiende a cero,

$$L_S(\gamma_j) \leq \frac{C}{log \frac{1}{N_n\theta_n}},$$

para $j = 1, ..., N_n$, donde C es una constante universal.

Se deduce de esto que

$$L_S(\partial D_n) \leq \frac{4\pi^2}{log\, 2} + \frac{C\, N_n}{log \frac{1}{N_n\theta_n}}.$$

Por tanto, si se eligen $N_n = [log\, n]$ (donde [ ] denota la parte entera) y $\theta_n = e^{-n}$, se tiene que

$$L_S(\partial D_n) \leq C \quad \text{y} \quad A_S(D_n) \to \infty,$$

lo cual implica que S no satisface la DIL.

Falta por ver que S verifica las conclusiones del teorema D.

Sea p un punto de ∂S. Si $p = 0$ ó $p \in E_n$ para algún n impar, tanto α como β son grandes. Si $p \in J$, donde J es un arco de E_n para algún n par, $\beta(p,r)$ es grande si $r > d(p, E_n - J)$. Si $r \leq d(p, E_n - J)$, es entonces $\alpha(p, r\beta(p,r))$ lo que es grande.

La justificación de lo que se acaba de afirmar se encuentra en este lema:

LEMA 5.1. **Dados N intervalos de longitud θ, $I_1, ..., I_N$, equidistribuidos en [0,1], si p es un punto de I_{j_0} y B se define como $B \equiv \cup I_j$, se verifica que**

$$\beta(p,r) \geq \frac{1}{2} \qquad \text{si} \qquad d(p, B - I_{j_0}) < r \leq 1,$$

y

$$\alpha(p, r\beta(p,r)) \geq C \qquad \text{si} \qquad 0 < r \leq d(p, B - I_{j_0}),$$

donde C es una constante positiva universal ($C \equiv cap([0,1])$), y donde α y β se consideran con respecto a B.

CAPITULO II. Area y existencia de función de Green.

Desde su aparición, la función de Green ha sido una pieza básica dentro del análisis, con numerosas aplicaciones en diversas ramas de las matemáticas. El primer problema que se plantea con respecto a la función de Green es el de su existencia. Efectivamente, éste es uno de los primeros hechos tenidos en cuenta en la teoría de clasificación de superficies de Riemann.

Hay diversas formas de caracterizar la existencia de función de Green en una superficie de Riemann; además, se conocen muchas condiciones suficientes. Por ejemplo, como ya se ha comentado en el capítulo I, si una superficie no es bass, entonces tiene función de Green.

La existencia de función de Green es equivalente a que haya una función superarmónica positiva no constante en la superficie (ver por ejemplo [A-S]). Por tanto, su existencia es independiente del polo elegido. Es interesante destacar que, aunque el operador de Laplace-Beltrami depende de la métrica Riemanniana de la superficie, el hecho de que los cambios de carta sean holomorfos garantiza la independencia de la superarmonicidad con respecto a la métrica conforme considerada. Esto es cierto debido a que la dimensión es dos.

Una condición equivalente es que el movimiento Browniano en la superficie sea **transitorio**, es decir, que dado cualquier compacto, el viajero Browniano tenga probabilidad positiva de visitarlo sólo un número finito de veces. Esto es equivalente a decir que la distancia extremal de un punto cualquiera a la "frontera de la superficie" sea finita (ver por ejemplo [A-S], [Val]). Si el movimiento Browniano no es transitorio, se dice que es **recurrente**. El movimiento Browniano en el disco unidad se define como el asociado al operador de Laplace-Beltrami del disco con la métrica hiperbólica, y es simplemente un cambio de tiempo del movimiento usual en el plano. Para definirlo en una superficie de Riemann hiperbólica basta con proyectar el del disco unidad mediante la aplicación recubridora universal. El movimiento Browniano asociado de esta manera es el correspondiente al generado por el laplaciano de la métrica hiperbólica (recuérdese que el recubrimiento universal es localmente una isometría); se obtendría otro diferente considerando otra métrica, pero el hecho de que sea transitorio ha de ser, en virtud de la caracterización anterior, independiente de la métrica.

Otra condición equivalente, aunque ahora sólo para el caso en que la superficie sea un dominio plano, es que su complemento respecto al plano complejo tenga capacidad logarítmica positiva, lo cual se satisface, por ejemplo, si tiene dimensión de Hausdorff positiva (la capacidad logarítmica está a nivel de dimensión cero). Que el "tamaño" de la frontera sea fundamental para el problema, es algo bastante intuitivo: cuanta más frontera haya, más posibilidades tendrá el viajero Browniano de llegar a ella, y por tanto, de abandonar todo compacto de la superficie, ya que a la frontera no se puede llegar en tiempo finito. Pensado desde otro punto de vista, si la frontera tiene capacidad positiva, entonces es suficientemente "gruesa" como para poder resolver el problema de Dirichlet. Por consiguiente, es razonable que se traten de dar criterios para la existencia de función de Green en superficies generales en relación con algún objeto intrínseco a la superficie, que dependa del tamaño de la frontera en el caso de un dominio plano.

Planteado así el problema, después de haber desarrollado todo un capítulo gracias a la métrica de Poincaré, parece razonable tratar de relacionar esta métrica con el problema que nos ocupa, ya que $\lambda_S(z) \leq 2/d(z, \partial S)$ y existe una cota inferior de $\lambda_S(z)$ que "no difiere demasiado" de $d(z, \partial S)^{-1}$, como ya se ha comentado. Las métricas dan inmediatamente dos conceptos: longitud y área. El área es, en principio, un concepto más regular, ya que se construye a partir de la longitud, por medio de integración.

El área de las bolas relativas a la métrica hipérbolica va a ser precisamente el objeto que se tratará de relacionar con la existencia de la función de Green. Este es un tema clásico y bien conocido. Consultar, por ejemplo, [D],[E],[Fel],[Kar],[L-S],[Val] y las referencias que ellos contienen sobre condiciones topológicas y geométricas más generales (para variedades Riemannianas arbitrarias) relacionadas con la existencia de función de Green.

Si S es una superficie de Riemann, p es un punto de S y t es un número positivo, se denota por $A_S(p,t)$ el área de la bola de radio t centrada en p. El problema concreto que se estudia aquí es: ¿qué tipo de crecimiento de $A_S(p,t)$ cuando t tiende a ∞ implica que S posee función de Green (que $S \notin O_G$)? Por supuesto, se tiene una cota superior para el crecimiento de $A_S(p,t)$; como la aplicación recubridora universal es localmente una isometría, se tiene que

$$A_S(p,t) \leq A_\Delta(0,t) = 4\pi senh^2(t/2) \approx \pi e^t$$

cuando $t \to \infty$. La igualdad se produce siempre que $B_S(p,t)$ sea simplemente conexa, ya que entonces el recubrimiento universal admite una inversa definida en la bola.

El siguiente teorema es conocido.

TEOREMA 2.1. **(i) Si para un punto $p_0 \in S$ y unas constantes c_0, t_0 se verifica que**

$$A_S(p_0,t) \geq c_0 e^t, \qquad \textbf{para todo} \quad t \geq t_0,$$

entonces S tiene función de Green.

(ii) Dada una función $\psi : (0,\infty) \to (0,\infty)$, creciente, y tal que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{e^t} = 0, \tag{0.1}$$

entonces existen una superficie de Riemann R y un punto $p_0 \in R$ tales que

$$A_R(p, t_0) \geq \psi(t), \qquad \textbf{para todo} \quad t \geq t_1,$$

pero R no tiene función de Green.

La parte (i) es elemental y la parte (ii) ha sido probada por Nicholls [N1]. En la sección 2 se da un esquema de una prueba sencilla del teorema 2.1. Es destacable el hecho de que en el ejemplo de la parte (ii), puede elegirse como R un dominio plano.

N. Varopoulos sugirió que en esta situación, es decir, si la superficie tiene curvatura constante negativa, un **crecimiento exponencial uniforme del área** debería implicar la existencia de función de Green. Más precisamente, si se define

$$A_S(t) = \inf_{p \in S} A_S(p, t),$$

y se supone que

$$\inf_{t \geq t_0} \frac{\log A_S(t)}{t} > 0,$$

¿puede deducirse que S tiene función de Green?

La conjetura es cierta para el caso de dominios planos, y de hecho, como corolario del siguiente teorema, se tiene un resultado más fuerte.

TEOREMA E. **Si existen un radio t_0 y una constante c_0 tales que**

$$A_S(p, t_0) \geq c_0, \qquad \textbf{para todo} \quad p \in S, \tag{0.2}$$

entonces existe una cota inferior positiva para las longitudes de todas las curvas cerradas que no son homótopas a cero. Además, el recíproco también es cierto.

Así se deduce:

COROLARIO 1.1. **Si S es un dominio plano que satisface (0.2) entonces S tiene función de Green.**

Por tanto la observación de Varopoulos es válida al menos en el caso de superficies de Riemann planas. El mismo argumento puede aplicarse para superficies de Riemann de género finito. La situación general es radicalmente diferente. Se demostrará:

TEOREMA F. **Existe una superficie de Riemann R tal que**

$$A_R(p,t) \geq e^{\alpha_0 t}, \qquad \textbf{para todo} \quad t \geq t_0,$$

donde α_0, t_0 son números positivos, y tal que R no tiene función de Green.

Es razonable pensar que α_0 puede reemplazarse por cualquier $\alpha \in (0,1)$, e incluso obtener que $A_R(t) \geq \psi(t)$, para una ψ como en (0.1), pero todavía no se ha probado. Si se hacen las cuentas con cuidado y se escriben explícitamente todas las constantes que aparecen en el argumento, se ve que $\alpha_0 = 0.08$ funciona. Un argumento de esta clase, pero un poco más sofisticado, permite construir un ejemplo similar con $\alpha_0 = 1/3$.

Varopoulos en [Va3, p.271] da un ejemplo como el del teorema F con $\alpha_0 = 1$, pero con curvatura variable. Su ejemplo es, topológicamente, el plano.

El capítulo finaliza con un resultado que conecta los hechos del capítulo anterior con el crecimiento exponencial del área.

PROPOSICION 5.1. **Si S es una superficie de Riemann que no es bass y h es su constante isoperimétrica, para cada $p \in S$ y $t_0, \varepsilon > 0$, existe una constante $C = C(p, t_0, \varepsilon)$ tal que**

$$A_S(p,t) \geq C exp[(h^{-1} - \varepsilon)t] \qquad \textbf{si} \quad t \geq t_0.$$

De la demostración de este enunciado puede obtenerse un corolario respecto al crecimiento uniforme en los puntos de la superficie.

COROLARIO 5.2. **Si S no es bass, si h es su constante isoperimétrica y si el radio de inyectividad de todos los puntos de S está acotado inferiormente por una constante positiva ι, entonces para cada $t_0, \varepsilon > 0$, existe una constante $C = C(t_0, \varepsilon, \iota)$ independiente de p y tal que**

$$A_S(p,t) \geq C\, exp[(h^{-1} - \varepsilon)t] \qquad \textbf{si} \quad t \geq t_0.$$

Se obtiene así el siguiente resultado que, en principio, resulta sorprendente:

COROLARIO 5.3. **Si S es un dominio plano y existen constantes positivas t_0 y c_0 tales que**

$$A_S(p, t_0) \geq c_0 \qquad \textbf{para todo} \quad p \in S,$$

entonces existen constantes c y α tales que

$$A_S(p, t) \geq c\, e^{\alpha t}$$

para todo $p \in S$ y para todo $t \geq t_0$.

En las secciones 1 y 3 se prueban los teoremas E y F respectivamente, mientras que la demostración del teorema 2.1 se trata en la sección 2. La sección 4 contiene la prueba de algunos lemas técnicos que son necesarios en la prueba del teorema F. En la sección 5 se demuestran la proposición 5.1 y sus corolarios.

SECCION II.1. Prueba del teorema E.

Comienza la sección con la prueba del corolario 1.1.

COROLARIO 1.1. **Si S es un dominio plano que satisface (0.2) entonces S tiene función de Green.**

Demostración: Sea S un dominio plano que satisface (0.2). Entonces existe una constante $c > 0$ tal que toda curva cerrada que no es homótopa a cero tiene longitud al menos c. De esto se deduce que S tiene una frontera uniformemente perfecta (ver [Pol]) y, en particular, que ∂S tiene capacidad positiva, y esta condición es equivalente a la existencia de función de Green. $\#C1.1.$

TEOREMA E. **Si existen un radio t_0 y una constante c_0 tales que**

$$(0.2) \qquad A_S(p, t_0) \geq c_0, \qquad \textbf{para todo} \quad p \in S,$$

entonces existe una cota inferior positiva para las longitudes de todas las curvas cerradas que no son homótopas a cero. Además, el recíproco también es cierto.

Demostración: Para probar el teorema se supone que S satisface (0.2) y se demostrará que si Γ es un grupo Fuchsiano que representa a S, entonces Γ no tiene elementos parabólicos y que la longitud de traslación de todo elemento hiperbólico de Γ es mayor que $c_0(2senh(t_0))^{-1}$.

Si γ es un elemento hiperbólico de Γ entonces el eje de γ se proyecta sobre una geodésica cerrada σ cuya longitud es la longitud de traslación de γ. Sea L esta longitud. Sea C el conjunto de puntos de S cuya distancia a σ es menor que t_0. Si $p \in \sigma$ entonces

$$c_0 \leq A_S(p, t_0) \leq A_S(C) \leq 2L\, senh(t_0).$$

La tercera desigualdad se obtiene del lema 1.3 del capítulo I. La prueba consistía simplemente en elevar C al disco unidad. De aquí se concluye que

$$L \geq c_0(2senh(t_0))^{-1}.$$

Si Γ tiene algún elemento parabolico γ, puede suponerse, ya que es posible conjugar el grupo, que $\gamma(z) = z + 1$. Entonces

$$A_S(\pi(i\lambda), t_0) \leq A_U(B_U(i\lambda, t_0) \cap \{0 \leq Im\, z < 1\}).$$

Como $B_U(i\lambda, t_0)$ es la bola euclídea centrada en el eje imaginario que pasa por los puntos $i\lambda e^{t_0}$ e $i\lambda e^{-t_0}$, entonces

$$c_0 \leq A_S(\pi(i\lambda), t_0) \leq A_U([0,1] \times [\lambda e^{-t_0}, \lambda e^{t_0}]) = \frac{2senh(t_0)}{\lambda},$$

para todo $\lambda > 0$, lo cual fuerza a c_0 a ser cero, llegando así a una contradicción.

A continuación se prueba el recíproco.

Supongamos que la longitud de cualquier curva cerrada que no sea homótopa a cero en S, está acotada inferiormente por $2c_1$. Entonces $B_S(p, c_1)$ es simplemente conexa para todo $p \in S$. Si dado un $p \in S$, $B_S(p, c_1)$ no lo fuera, existirían dos geodésicas distintas σ_1, σ_2 que partirían de $p = \sigma_1(0) = \sigma_2(0)$ y acabarían en el mismo punto $q = \sigma_1(t_1) = \sigma_2(t_2)$, que pertenecería a $B_S(p, c_1)$. Si $\sigma \equiv \sigma_1 \cup \sigma_2$, entonces σ no puede ser homótopa a cero, ya que si lo fuera, exitirían elevaciones $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ de σ_1, σ_2 a Δ, con los mismos puntos iniciales y finales. Por tanto las elevaciones tendrían que coincidir, lo que implicaría que $\sigma_1 = \sigma_2$, que es una contradicción. Por tanto, σ no es homótopa a cero en S, y consecuentemente

$$2c_1 > L_S(\sigma) \geq 2c_1,$$

lo cual es una contradicción.

Por tanto, $B_S(p, c_1)$ es simplemente conexa para todo $p \in S$, y entonces puede elevarse a Δ para obtener

$$A_S(p, c_1) = A_S(0, c_1) = 4\pi\, senh^2(c_1/2) = c_0. \qquad \#TE.$$

Se verá en la sección 5 cómo la condición (0.2) da automáticamente un crecimiento exponencial en el caso de dominios planos. Esto es claramente falso si S tiene género: basta pensar simplemente en las superficies compactas. Pero excluido este caso patológico, también se puede obtener un resultado.

PROPOSICION 1.2. **Si S no es compacta, la condición (0.2) implica que existe una constante c tal que**

$$A_S(p, t) \geq ct,$$

para todo $t \geq t_0$ y para todo $p \in S$.

Demostración: Supongamos que $A_S(p, t_0) \geq c_0$ para todo $p \in S$. Los razonamientos de la prueba del teorema E muestran que existe una constante positiva ι, tal que $B_S(p, \iota)$ es simplemente conexa para todo $p \in S$. De hecho, se sabe que puede escogerse

$$\iota = c_0 \, (4 \, senh(t_0))^{-1}.$$

Como S no es compacta, dados $p \in S$ y $t > 0$, existe un $q \in S$ a distancia t de p. Sea γ una geodésica de p a q que minimiza la distancia. Si $\pi : \Delta \to S$ es un recubrimiento universal con $\pi(0) = p$, sea $\tilde{\gamma}$ la elevación de γ que comienza en 0 y acaba en a, con $\pi(a) = q$ ($\tilde{\gamma}$ es el segmento rectilíneo que une 0 con a). Se definen ahora los puntos z_j como aquellos puntos de $\tilde{\gamma}$ situados a distancia $(2j-1)\iota$ de 0, para $j = 1, ..., N$, donde $N = [t/(2\iota)]$ y [ ] denota la parte entera.

Las bolas $B_S(\pi(z_j), \iota)$, además de ser simplemente conexas, son disjuntas dos a dos. Si no lo fueran, existiría un $z \in B_S(\pi(z_j), \iota) \cap B_S(\pi(z_k), \iota)$, por lo que la distancia entre $\pi(z_j)$ y $\pi(z_k)$ sería menor que 2ι, lo cual implicaría que $d_S(p, q) < t$.

Entonces se tiene

$$A_S(p,t) \geq \sum_{j=1}^{N} A_S(\pi(z_j), \iota) = 4\pi N \, senh^2(\iota/2) > 4\pi \, senh^2(\iota/2) \left(\frac{t}{2\iota} - 1\right). \quad \#P1.2.$$

Un **Z**-cubrimiento de una superficie de Riemann compacta de género 2 da un ejemplo en el que $A_S(p, t) \asymp t$.

SECCION II.2. Prueba del teorema 2.1.

TEOREMA 2.1. **(i) Si para un punto $p_0 \in S$ y unas constantes c_0, t_0 se verifica que**

$$A_S(p_0,t) \geq c_0 e^t, \qquad \textbf{para todo} \quad t \geq t_0,$$

entonces S tiene función de Green.

(ii) Dada una función $\psi : (0,\infty) \to (0,\infty)$, creciente, y tal que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{e^t} = 0, \tag{0.1}$$

entonces existen una superficie de Riemann R y un punto $p_0 \in R$ tales que

$$A_R(p,t_0) \geq \psi(t), \qquad \textbf{para todo} \quad t \geq t_1,$$

pero R no tiene función de Green.

Comencemos probando la parte (i). Por tanto se supone que para algún punto $p_0 \in S$ y para alguna constante c_0 se tiene

$$A_S(p_0,t) \geq c_0 e^t. \tag{2.1}$$

Se verá que S tiene una función armónica acotada no constante, lo cual implica que tiene función de Green. Sea Π un recubrimiento universal de Δ sobre S con $\Pi(0) = p_0$. Sean Γ el grupo de cubrimiento asociado y D la región de Dirichlet de Γ en 0 [Bea, p.227]. Es fácil ver (consultar por ejemplo [Sull, p.488]) que (2.1) implica que $\partial D \cap \partial\Delta$ tiene longitud positiva:

Sea $\omega(r)$ el ángulo de la intersección de D con la circunferencia de radio hiperbólico r. Como D es convexo, $\omega(r)$ es una función decreciente. Si $\partial D \cap \partial\Delta$ tiene longitud cero (es decir, si $\omega(r) \to 0$ cuando $r \to \infty$), se llega a una contradicción. Dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un r_0 tal que $\omega(r) < \varepsilon$ si $r > r_0$. Si se define $a(r) \equiv L_\Delta(\partial B_\Delta(o,r))$, se tiene que

$$\frac{A_S(p_0,t)}{A_\Delta(0,t)} = \frac{\int_0^t a(r)\,\omega(r)\,dr}{\int_0^t a(r)\,dr} \leq \frac{\int_0^{r_0} a(r)\,\omega(r)\,dr}{\int_0^t a(r)\,dr} + \varepsilon\,\frac{\int_{r_0}^t a(r)\,dr}{\int_0^t a(r)\,dr},$$

lo cual implica que

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{A_S(p_0,t)}{A_\Delta(0,t)} \leq \varepsilon,$$

en contradicción con (2.1).

Sea E un subconjunto de Borel de $\partial D \cap \partial\Delta$ cuya longitud es la mitad de la longitud de $\partial D \cap \partial\Delta$ y sea $F = \cup_{\gamma\in\Gamma}[\gamma(E)]$. Si u es la extensión de Poisson de la función característica de F, entonces u es Γ-invariante, acotada y no constante. Obsérvese que S es accesible en la terminología de [Po2], ya que se dice que S es accesible si existe un conjunto medible $B \subset \partial\Delta$ de longitud positiva, que no contiene dos puntos Γ-equivalentes.

El ejemplo de (ii) puede construirse de la siguiente manera: Sean θ_n números positivos decrecientes a cero lentamente, con $\theta_0 = \pi$. Sea g_n la geodésica que une $e^{i\theta_{n-1}}$ con $e^{i\theta_n}$, y h_n su reflexión respecto al eje real. Sean las transformaciones de Möbius γ_n que conservan Δ y tales que $\gamma_n(g_n) = h_n$, y tales que si $p \in g_n$, entonces $\gamma_n(p) = \bar{p}$, donde "$-$" significa "el conjugado complejo". El teorema de Poincaré permite afirmar que el grupo generado por las γ_n's es un grupo Fuchsiano y que el polígono (de infinitos lados) Q determinado por las g_n's y las h_n's es una región fundamental. El cociente $R = \Delta/\Gamma$ es el plano menos una sucesión de puntos crecientes a ∞. Esto implica que R no tiene función de Green. Ahora, dada $\psi(t)$ satisfaciendo (0.1), puede elegirse la sucesión θ_n tal que

$$A_\Delta(Q \cap B_\Delta(0,t)) \geq \psi(t), \qquad \text{para todo } t \geq t_1,$$

y consecuentemente, si p_0 es el punto de R representado por 0, entonces

$$A_R(p_0, t) \geq \psi(t).$$

Esta es esencialmente la construcción de Nicholls en [N1].

SECCION II.3. Prueba del teorema F.

TEOREMA F. **Existe una superficie de Riemann R tal que**

$$A_R(p,t) \geq e^{\alpha_0 t}, \qquad \textbf{para todo} \quad t \geq t_0,$$

donde α_0, t_0 son números positivos, y tal que R no tiene función de Green.

La prueba se divide en dos pasos. Primeramente se construye un grafo G con dos propiedades:
(i) para todo vértice v, el número de vértices a distancia menor que t en el grafo es, al menos, $ce^{\alpha_0 t}$,
(ii) el camino aleatorio en el grafo (con la misma probabilidad de saltar de un vértice a cualquiera de sus vértices adyacentes) es recurrente.

El segundo paso consiste en construir una superficie de Riemann siguiendo este modelo discreto.

El grafo representado por la recta real en el que los vértices son los números enteros tiene camino aleatorio recurrente, pero el número de vértices a distancia t de uno dado es del orden de t.

Por otra parte, en el grafo binario, el número de vértices a distancia t de uno dado es del orden de 2^t, pero su camino aleatorio asociado es transitorio.

Lo que se hará es construir un árbol con "injertos" de estos dos anteriores.

El bloque de construcción básico es una Y-pieza, un grafo con cuatro vértices y tres aristas que tiene la forma de la letra Y. Se denomina nodo al vértice central y vértices virtuales a los otros tres vértices. El grafo se obtendrá uniendo Y-piezas por los vértices virtuales. La razón de que los vértices virtuales se denominen así es que al formar el grafo puede considerarse que estos no son vértices en un sentido restringido de la palabra, ya que cada uno de ellos conecta solamente dos aristas. Un nodo tiene tres vecinos que son vértices virtuales, y un vértice virtual tiene dos vecinos que son nodos.

Sea una sucesión creciente de enteros positivos $\{k_j\}_{j=1}\infty$.

El punto de partida son dos Y-piezas unidas por un vértice virtual. Se denota este punto común por p_0. En cada vértice virtual que permanece libre (hay cuatro de ellos) se une otra Y-pieza por uno de sus vértices virtuales. Ahora hay 2^3 vértices virtuales libres, y se coloca en cada uno de ellos una Y-pieza. El proceso se repite $(k_1 - 2)$ veces. Ahora hay 2^{k_1} vértices virtuales libres, y en este momento se invierte el proceso. Los vértices virtuales libres pueden considerarse emparejados (aquellos que tienen el mismo padre). En cada par se coloca una Y-pieza. Ahora hay 2^{k_1-1} vértices virtuales libres. Todavía van en parejas (los que tienen el mismo abuelo), y se une cada par con una Y-pieza. En este mom hay 2^{k_1-2} vértices virtuales libres. Se repite el proceso hasta que finalmente qued único vértice virtual libre; se denomina p_1, y se continua de nuevo uniendo Y-piezas l obtener 2^{k_2} vértices virtuales libres. Se invierte de nuevo el proceso hasta que sólo q uno libre, al que se denomina p_2. Así continúa el proceso.

Cualquier arista en este grafo conecta un vértice virtual con un nodo. Se defi distancia en el grafo diciendo que la distancia entre un nodo y un vértice virtual adya es $1/2$.

Independientemente de cómo se elijan los k_n, el camino aleatorio en el grafo es recurr Una forma de verificar esto es utilizar la conocida analogía con los circuitos eléctricos está cuidadosamente descrita en el maravilloso libro de Doyle y Snell [D-S]. En este lib explican las definiciones y los resultados. Se considera el grafo como un circuito eléc y cada arista con conductancia 1, [D-S, p.40]. (Esta es la condición eléctrica equivale que el camino aleatorio tenga igual probabilidad de saltar a cualquiera de sus vecinos fácil ver que la resistencia efectiva ([D-S, p.53]) de cada pieza del grafo "entre" p_n y p_n esencialmente constante y, consecuentemente, la resistencia efectiva del grafo comple p_0 a ∞. (Consultar p.55 y capítulo 6.5 de [D-S] para ver las técnicas usuales de evalu de la resistencia efectiva de un grafo). Por tanto el camino aleatorio que comienza tiene probabilidad cero de escapar a ∞.

En cualquier caso, más adelante se verificará directamente que la superficie de Rie construida a partir del grafo, no tiene función de Green.

Se eligen los k_n's tales que $k_{n+1} = 2^n k_1$.

Para cada vértice p se denota por $a(p, m)$ el número de Y-piezas del grafo conte en la bola (respecto a la distancia del grafo definida anteriormente) de centro p y ra entero positivo m. Cálculos elementales muestran en primer lugar que

$$a(p_j, m) \geq c_1 2^{Bm}, \tag{3.1}$$

para cada j y cada entero positivo m, donde $B = 1/10$ funciona, y que de esta desigu se deduce fácilmente que

$$a(p, m) \geq c_1 2^{(B/2)m}, \tag{3.2}$$

para cada vértice p y cada entero positivo m.

Supongamos ahora estas desigualdades para continuar con el resto del argument comprobación de (3.1) y (3.2) se deja para la siguiente sección.

Para construir la superficie de Riemann según el modelo del grafo anterior, se susti las Y-piezas por las también llamadas Y-piezas de Löbell, que son una herramienta hab en la construcción de superficies de Riemann. Una descripción detallada de estas Y-p y algunas de sus aplicaciones pueden encontrarse en [Cha, cap.X.3].

Una Y-pieza de Löbell es una esfera a la que se le han quitado tres discos, dotada de una métrica de curvatura constante negativa -1, para la cual las tres curvas frontera son geodésicas. También se exige que las longitudes de las curvas frontera sean las mismas, digamos 2α, y que la distancia entre dos cualesquiera de estas curvas frontera sea β. Entonces α y β están relacionadas por

$$senh(\alpha/2)\, senh(\beta/2) = 1/2.$$

(Esta es la única restricción para α y β. Consultar [Bul] y [Cha, p.248] para ver los detalles).

Fijemos $\alpha_0 = \beta_0$ satisfaciendo la relación anterior.

Si ahora se colocan juntas las Y-piezas de Löbell siguiendo el diseño combinatorio del grafo e identificando las curvas frontera correspondientes, obtenemos una superficie completa R de curvatura constante negativa -1. La métrica que tiene R es su métrica de Poincaré en virtud de la unicidad de la que hablamos en la introducción. Los vértices virtuales se corresponden con las curvas frontera de las Y-piezas de Löbell, y las Y-piezas mismas están representadas por los nodos.

Sean Q_1 y Q_2 dos Y-piezas de Löbell de R no adyacentes, y sean q_1 y q_2 sus nodos correspondientes. Entonces, si $dist_G$ es la distancia en el grafo G,

$$A^{-1} \leq \frac{d_R(Q_1, Q_2)}{dist_G(q_1, q_2)} \leq A,$$

donde A es una constante fija.

Ya que las Y-piezas tienen la misma área 2π, se deduce inmediatamente que si $p \in R$ entonces

$$A_R(p,t) \geq c_1 e^{c_2 t}, \qquad \text{para todo} \quad t \geq t_0,$$

donde c_1 y c_2 son constantes fijas.

Sólo falta comprobar que R no tiene función de Green.

Las dos Y-piezas usadas para comenzar la construcción tienen una curva frontera común que está representada por p_0. Se llamará D al dominio unión de ambas Y-piezas. Sólo hay que probar que la distancia extremal $\lambda(\Gamma)$ de la familia de curvas Γ que "unen" ∂D con el ∞ de Alexandrov de R es infinita [A-S, p.229]. Ahora, todas las geodésicas g_j representadas por los vértices virtuales p_j tienen longitud $2\alpha_0$. Sea C_j el collar alrededor de g_j con ancho d, donde d es una constante fija adecuada (por ejemplo, puede tomarse d satisfaciendo $senh(d) = cosech(\alpha_0/2)$). Sea Γ_j la familia de curvas que unen las componentes frontera de C_j. Entonces la distancia extremal $\lambda(\Gamma_j)$ es una constante fija λ_0. Ya que toda curva en Γ contiene una subcurva en cada Γ_j, las leyes de composición para la longitud extremal ([A-S, p.222]) permiten afirmar que

$$\lambda(\Gamma) \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda(\Gamma_j) = n\lambda_0.$$

De aquí se deduce que $\lambda(\Gamma) = \infty$, como se deseaba.

En cualquier caso el grafo y la superficie de Riemann son claramente "roughly" isométricos en el sentido de Kanai [Kan]; consecuentemente, ya que el camino aleatorio en el grafo es recurrente, el movimiento Browniano en la superficie de Riemann también es recurrente, es decir, R no tiene función de Green. $\#TF$.

SECCION II.4. Prueba de (3.1) y (3.2).

LEMA 4.1. **Existe una constante universal $c \geq 0$ tal que**

$$a(p_j, m) \geq c\,2^{\frac{m}{10}}$$

para todo j, y para todo entero positivo m.

Demostración: Se comienza con p_0. Se distinguen tres casos.

(1) Si $\quad 0 < m \leq k_1 - 1$, entonces

$$a(p_0, m) = 2^{m+1} - 2 \geq 2^m.$$

(2) Si $\quad -1 + 2\sum_1^N k_j < m \leq -1 + 2\sum_1^N k_j + k_{N+1}$, entonces

$$a(p_o, m) = -1 + 2\sum_1^N (2^{k_j} - 1) + 2^{m+1-2\sum_1^N k_j} - 1 \geq c\,(2^{k_N} + 2^{m-2\sum_1^N k_j}).$$

Usando la desigualdad

$$(4.1) \qquad x + y \geq x^{1-u} y^u \qquad \text{para todo} \quad x, y > 0,\ u \in (0,1),$$

con $u = 1/5$, se tiene

$$a(p_0, m) \geq c2^{\frac{m}{5}},$$

porque $\frac{4}{5}k_N - \frac{2}{5}\sum_1^N k_j \geq 0$ (ya que $k_{n+1} = 2^n k_1$).

(3) Si $\quad -1 + 2\sum_1^N k_j + k_{N+1} < m \leq -1 + 2\sum_1^{N+1} k_j$, entonces

$$a(p_0, m) \geq a(p_0, -1 + 2\sum_1^N k_j + k_{N+1}) \geq c\,2^{\frac{m}{10}}.$$

La prueba ha terminado para el caso $j = 0$.

Para un j arbitrario, simplemente se repiten los mismos cálculos sin contar las Y-piezas de las generaciones anteriores a p_j y se obtiene la misma desigualdad con las mismas constantes universales. $\#L4.1.$

LEMA 4.2. **Sea p un vértice virtual entre p_{j-1} y p_j. Si d es la distancia en el grafo entre p y p_j, entonces**

$$a(p,m) \geq c\,2^{\frac{m}{3}}, \qquad \text{si } 1 \leq m \leq d,$$

donde c es una constante absoluta.

Demostración: Primeramente obsérvese que $a(p,m) = a(p',m)$ si p y p' son vértices virtuales de la misma generación.

Si p es tal que $d \leq k_j$, entonces

$$(4.2) \qquad a(p,m) \geq 2(2^{\frac{m}{2}} - 1) \geq c\,2^{\frac{m}{2}}, \qquad \text{si } 1 \leq m \leq d.$$

Para conseguir esta desigualdad no ha sido necesario contar las Y-piezas de las generaciones anteriores a p.

Si p es tal que $d > k_j$, entonces

$$a(p,m) \geq 2^m, \qquad \text{si } 1 \leq m \leq d - k_j,$$

y

$$a(p,m) \geq 2^{d-k_j} + c\,2^{\frac{m-d+k_j}{2}} \geq c\,2^{\frac{m}{3}}, \qquad \text{si } d - k_j < m \leq d,$$

donde se usa (4.2) en la primera desigualdad y (4.1) con $u = 2/3$ en la segunda. Entonces

$$a(p,m) \geq c\,2^{\frac{m}{3}} \qquad \text{if } 1 \leq m \leq d. \qquad \#L4.2.$$

Y por fin se tienen todos los elementos necesarios para probar el resultado final.

LEMA 4.3. **Existe una constante universal $c > 0$ tal que**

$$a(p,m) \geq c\,2^{\frac{m}{13}}$$

para todo vértice virtual p, y para todo m positivo.

Demostración: Sea un vértice virtual p fijo. Entonces, si $1 \leq m \leq d$, se tiene la desigualdad

$$a(p,m) \geq c\,2^{\frac{m}{3}}.$$

Y si $m \geq d$, entonces

$$a(p,m) \geq c(2^{\frac{d}{3}} + 2^{\frac{m-d}{10}}) \geq c\,2^{\frac{m}{13}},$$

donde se ha usado (4.1) con $u = 10/13$. Entonces

$$a(p,m) \geq c\,2^{\frac{m}{13}} \qquad \text{para todo entero positivo } m.$$

Con una adecuada elección de los $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$, el exponente $1/13$ puede reemplazarse por cualquier número menor que $1/9$. $\# L4.3$.

SECCION II.5. Constante isoperimétrica y área.

En primer lugar se prueba la proposición 5.1.

PROPOSICION 5.1. **Si S es una superficie de Riemann que no es bass y h es su constante isoperimétrica, para cada $p \in S$ y $t_0, \varepsilon > 0$, existe una constante $C = C(p, t_0, \varepsilon)$ tal que**

$$A_S(p,t) \geq Cexp[(h^{-1} - \varepsilon)t] \qquad \textbf{si} \quad t \geq t_0.$$

Demostración: Sean $p \in S$ y $t_0, \varepsilon > 0$ fijos. Si se denota por $A(t)$ el área $A_S(p,t)$, por $L(t)$ la longitud de $\partial B_S(p,t)$ y por h la constante isoperimétrica, entonces se tiene

$$A(t) \leq hL(t) \qquad \text{para todo} \quad t \geq 0.$$

Por tanto, dados cualesquiera $\eta > 0$ y $t \geq \eta$,

$$A(t) = \int_0^t L(u)du = \int_0^{t-\eta} L(u)du + \int_{t-\eta}^t L(u)du \geq$$

$$\geq A(t-\eta) + \frac{1}{h}\int_{t-\eta}^t A(u)du \geq \left(1 + \frac{\eta}{h}\right) A(t-\eta).$$

Se ha conseguido pues,

$$A(t) \geq \left(1 + \frac{\eta}{h}\right) A(t-\eta)$$

para todo $\eta > 0$ y para todo $t \geq \eta$.

Dado ahora un entero positivo k, iterando la desigualdad, resulta que

$$A(k\eta) \geq \left(1 + \frac{\eta}{h}\right)^{k-1} A(\eta).$$

Ahora, si $t \geq \eta$, se tiene

$$A(t) \geq A([t/\eta]\eta) \geq A(\eta)\left(1 + \frac{\eta}{h}\right)^{[t/\eta]-1} \geq A(\eta)\left(1 + \frac{\eta}{h}\right)^{\eta-2}.$$

Como $lim_{\eta \to 0}(1 + \eta/h)^{1/\eta} = exp(1/h)$, se sabe que existe un $\eta_0 \leq t_0$ tal que

$$(1 + \eta_0/h)^{1/\eta_0} \geq exp(1/h - \varepsilon),$$

y entonces

$$A_S(p,t) = A(t) \geq c\, exp[(1/h - \varepsilon)t] \qquad \text{para todo} \quad t \geq t_0,$$

donde

$$c = A_S(p, \eta_0)\left(1 + \frac{\eta_0}{h}\right)^{-2}. \qquad \#P5.1.$$

Obsérvese que es imprescindible para obtener una desigualdad como ésta, poner los cuantificadores ε y t_0. Si se plantea desde el principio la inecuación integral

$$h\, A(t) \geq \int_0^t A(u)du,$$

que es la desigualdad inversa de la que aparece en el lema de Gronwall, la solución en el caso de igualdad es $A(t) = 0$, lo que arruina cualquier esperanza de obtener algo útil en esta línea si no se introduce alguna idea nueva.

COROLARIO 5.2. **Si S no es bass, si h es su constante isoperimétrica y si el radio de inyectividad de todos los puntos de S está acotado inferiormente por una constante positiva ι, entonces para cada $t_0, \varepsilon > 0$, existe una constante $C = C(t_0, \varepsilon, \iota)$ independiente de p y tal que**

$$A_S(p,t) \geq C\, exp[(h^{-1} - \varepsilon)t] \qquad \textbf{si} \quad t \geq t_0.$$

Demostración: Si el radio de inyectividad está acotado inferiormente por ι, en la demostración anterior puede elegirse $\eta_0 < \iota$, y entonces

$$c = 4\pi\, senh^2(\eta_0/2)\left(1 + \frac{\eta_0}{h}\right)^{-2}$$

es independiente de p. $\qquad \#C5.2.$

COROLARIO 5.3. **Si S es un dominio plano y existen constantes positivas t_0 y c_0 tales que**

$$A_S(p, t_0) \geq c_0 \qquad \textbf{para todo} \quad p \in S,$$

entonces existen constantes c y α tales que

$$A_S(p,t) \geq c\, e^{\alpha t}$$

para todo $p \in S$ y para todo $t \geq t_0$.

Demostración: La prueba ya es sencilla. La demostración del corolario 1.1 muestra que ∂S es uniformemente perfecta, lo cual implica que S no es bass. La prueba del teorema E muestra también que el radio de inyectividad está acotado inferiormente por una constante independiente de los puntos de S. Por tanto basta con aplicar el corolario 5.2. $\qquad \#C5.2.$

CAPITULO III. Extensión holomorfa.

El problema fundamental en la teoría geométrica de funciones es la existencia de funciones holomorfas entre dos superficies de Riemann dadas y, caso de que existan, el estudio de su crecimiento.

En este contexto podemos ver los teoremas de Liouville y de Picard:

TEOREMA DE LIOUVILLE. **Las únicas funciones en $H(\mathbf{C}, \Delta)$ son las constantes.**

TEOREMA DE PICARD. **Las únicas funciones en $H(\mathbf{C}, \mathbf{C}-\{0,1\})$ son las constantes.**

Es evidente que el teorema de Liouville se deduce del teorema de Picard. Existen dos teoremas de los que se deducen los anteriores:

TEOREMA DE RIEMANN. **Si $f \in H(\Delta^*, \Delta)$ entonces f se extiende a una función de $H(\Delta, \Delta)$.**

TEOREMA GRANDE DE PICARD. **Si $f \in H(\Delta^*, \mathbf{C} - \{0,1\})$ entonces f se extiende a una función de $H(\Delta, \hat{\mathbf{C}})$.**

Ya que nunca va a crear confusión, se denotará de igual forma a una función y a su extensión holomorfa.

En este caso también el teorema de Riemann se deduce del teorema grande de Picard.

A su vez, estos teoremas pueden generalizarse mucho más:

El teorema grande de Picard puede ser probado de forma muy elegante usando la métrica de Poincaré de $\mathbf{C} - \{0,1\}$, y de esa demostración pueden deducirse varios resultados:

COROLARIO 0.1. **Si $f \in H(\Delta^*, S)$ donde S es una superficie de Riemann no excepcional, entonces si para alguna sucesión $\{z_n\}$ convergente a 0 se tiene que la sucesión imagen $\{f(z_n)\}$ converge a algún punto $p \in S$, puede definirse $f(0) = p$ y entonces $f \in H(\Delta, S)$.**

COROLARIO 0.2. **Si $f \in H(\Delta^*, S)$ donde S es una superficie de Riemann no excepcional y si se verifica una de las dos condiciones siguientes:**
(a) S no es compacta y $f(\Delta^*)$ es relativamente compacto,
(b) S es compacta,
entonces f se extiende a una función de $H(\Delta, S)$.

En [Ro3] se prueba el teorema que cierra por completo esta cuestión:

TEOREMA 0.3. **Sea $f \in H(\Delta^*, S)$ donde S es una superficie de Riemann hiperbólica. Entonces se verifica una de las dos siguientes afirmaciones:**
(i) f puede extenderse a una función de $H(\Delta, S)$,
(ii) S está contenida en otra superficie de Riemann $R = S \cup \{p\}$ de tal forma que si definimos $f(0) = p$, entonces $f \in H(\Delta, R)$.

Si se pretende generalizar el teorema de Riemann, es decir, buscar conjuntos E que se puedan quitar a Δ en lugar de $\{0\}$, de forma que el teorema de Riemann continúe siendo cierto, habrá que hablar de la capacidad analítica. Para entender más a fondo el problema conviene hablar de conjuntos nulos, en el sentido de Painlevé.

Un subconjunto compacto $E \subset \mathbf{C}$ es un **conjunto nulo** si $\hat{\mathbf{C}} - E \in O_{AB}$, donde O_{AB} denota la clase de superficies de Riemann cuyas únicas funciones holomorfas y acotadas son las constantes.

El teorema de la aplicación de Riemann muestra que si un compacto E contiene un conexo cerrado con más de un punto, entonces E no es un conjunto nulo. Por tanto un conjunto nulo es totalmente disconexo. A partir de ahora sólo se considerarán compactos E totalmente disconexos.

También existe una condición suficiente.

PROPOSICION 0.4. **Si E es un compacto con $H_1(E) = 0$, donde H_1 es la medida de Hausdorff unidimensional, entonces E es un conjunto nulo.**

Se sabe que existe un compacto E con $H_1(E) = 1$, que es un conjunto nulo.

Sin embargo, esta condición suficiente ($H_1(E) = 0$) es una caracterización en el caso de que E esté contenido en una curva rectificable.

También se ha probado que si $dim\,E > 1$ entonces E no es un conjunto nulo.

La relación entre conjuntos nulos y la generalización del teorema de Riemann viene dada por el siguiente resultado.

PROPOSICION 0.5. **Sea E un compacto. E es un conjunto nulo si y sólo si para cualquier dominio Ω que contiene a E se verifica que toda función de la clase $H(\Omega - E, \Delta)$ puede extenderse a una función de $H(\Omega, \Delta)$.**

Las ideas para probar estos hechos se encuentran en [Fi, pp.64-65].

Dados un compacto E y un punto p de $\hat{\mathbf{C}} - E$, se define

$$\gamma(E) = sup\{|h'(p)| : h \in H^\infty(\hat{\mathbf{C}} - E),\ \|h\|_\infty \leq 1\}.$$

En virtud de la proposición 0.5, $\gamma(E) = 0$ si y sólo si cualquier función holomorfa y acotada en un entorno de E, excepto quizás en E, admite una extensión holomorfa a E. Por tanto, se tiene:

TEOREMA 0.6. **Sea E un compacto de capacidad analítica cero contenido en Δ, y $f \in H(\Delta - E, \Delta)$. Entonces f se extiende a una función de $H(\Delta, \Delta)$.**

El hecho de que $\gamma(E)$ sea cero es independiente del punto p elegido. Se acostumbra a elegir el ∞ para normalizar. A $\gamma(E)$ se le denomina la **capacidad analítica** de E. Como ya se ha comentado, si $H_1(E) = 0$, entonces $\gamma(E) = 0$, y si $dim\, E > 1$, entonces $\gamma(E) > 0$. Por tanto, la capacidad analítica está al nivel de la dimensión de Hausdorff 1.

Después de estudiar los dos problemas por separado, puede plantearse la búsqueda de resultados que unifiquen ambas posibilidades. Es decir, si se tiene una $f \in H(\Delta - E, S)$, donde E es un compacto de capacidad analítica cero y S una superficie de Riemann, ¿bajo qué condiciones puede f extenderse analíticamente a E?

Ya se ha visto que se verifica el resultado siguiente:

COROLARIO 0.2. **Si $f \in H(\Delta^*, S)$ donde S es una superficie de Riemann no excepcional y si se verifica una de las dos condiciones siguientes:**
(a) S no es compacta y $f(\Delta^*)$ es relativamente compacto,
(b) S es compacta,
entonces f se extiende a una función de $H(\Delta, S)$.

Aquí se prueba:

TEOREMA G. **Si E es un compacto de capacidad analítica cero contenido en Δ, si $f \in H(\Delta - E, S)$ donde S es una superficie de Riemann, y si se verifica**
(a') S no es compacta y $f(\Delta - E)$ es relativamente compacto,
entonces f se extiende a una función de $H(\Delta, S)$.

Conviene destacar el hecho de que en este enunciado desaparece superficialmente la hipótesis, hasta ahora omnipresente, de que S sea hiperbólica. La causa de que esto ocurra es que un compacto contenido en una superficie de Riemann no compacta, siempre puede "meterse dentro" de una superficie hiperbólica. Se hace algo semejante a esto en la demostración del corolario 1.1.

El ejemplo más sencillo de esta situación es el caso $S = \mathbf{C}$. Entonces, $f(\Delta - E)$ compacto quiere decir que f está acotada, y se tiene el resultado conocido.

Conviene observar que el resultado no es cierto en general si sustituimos la hipótesis **(a')** por **(b')**: S es compacta e hiperbólica (el género de S es mayor que 1). A continuación se da un breve ejemplo que lo demuestra.

Ejemplo: Sean las transformaciones de Möbius

$$\gamma_1(z) = \frac{z+\lambda}{1+\lambda z}, \qquad \gamma_2(z) = \frac{z+\lambda i}{1-\lambda i z},$$

y Γ_λ el grupo generado por γ_1 y γ_2. $R \equiv \Delta/\Gamma_\lambda$ es una superficie de Riemann, que topológicamente es un toro al que se le ha quitado un disco, si λ está próximo a 1. Sea S el doble de Schottky de R [A-S, pp.26-27], que es una superficie compacta de género 2. Si $f_0 : \Delta \to R$ es un recubrimiento universal y consideramos su reflexión $f : \hat{\mathbf{C}} - E_\lambda \to S$, donde E_λ es el conjunto límite de Γ_λ, f no puede extenderse a E_λ, y además se tiene que

$$dim\, E_\lambda \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad \lambda \to 1,$$

por lo que E_λ tiene capacidad analítica cero.

La hipótesis sobre la no compacidad de S es pues, esencial, pero usando este teorema puede encontrarse un resultado acerca de superficies compactas.

COROLARIO 1.1. **Sea E un compacto de capacidad analítica cero contenido en Δ, sea S una superficie de Riemann compacta y sea $f \in H(\Delta - E, S)$. Si existe un abierto no vacío $\mathcal{U}$ de S tal que $f(\Delta - E)$ tiene intersección vacía con $\mathcal{U}$, entonces f se extiende a una función de $H(\Delta, S)$.**

El corolario 1.1 ha sido probado con anterioridad por Shiga [Sh] usando técnicas distintas. Aunque el resultado de Shiga es más general, puesto que habla de extensión a espacios recubridores, en este contexto su teorema 2 establece lo siguiente:

TEOREMA 0.7. **Si E es un compacto de capacidad analítica cero contenido en Δ, y S es una superficie de Riemann C-no-degenerada, toda $f \in H(\Delta - E, S)$ se extiende a una función de $H(\Delta, S)$.**

Una superficie de Riemann S es C-no-degenerada si la pseudodistancia de Carathéodory es en realidad una distancia, a la que acostumbra a llamarse C_S, y además verifica una propiedad adicional: existe una constante $\varepsilon > 0$ tal que para toda curva cerrada γ, no homótopa a cero en S, se tiene que la longitud de γ con respecto a C_S es mayor que ε.

Si S es una superficie de Riemann y p, q son dos puntos de S, la pseudodistancia de Carathéodory C_S de S se define como

$$C_S(p,q) \equiv sup\, \{ d_\Delta(f(p), f(q)) : f \in H(S, \Delta) \}.$$

Es fácil comprobar que C_S es una pseudodistancia, que $C_S \leq d_S$, y que si $f \in H(R, S)$, entonces

$$C_S(f(p), f(q)) \leq C_R(p,q),$$

para todos los puntos p, q de R (consultar [Ko] para una exposición más detallada).

Si S es una superficie de Riemann compacta con borde (sin punturas), entonces S es C-no-degenerada (aunque si S es compacta, se tiene que $C_S \equiv 0$).

La métrica C_S es bastante natural para probar teoremas de extensión, ya que ignora por completo los conjuntos de capacidad analítica cero.

Si se desea probar un teorema que permita extender $f \in H(\Delta - E, S)$ para S compacta, pidiendo que E sea un conjunto "pequeño", no basta con pedir $dim E < \alpha$, para ningún $\alpha > 0$, ya que en el ejemplo que se ha dado, la dimensión de E_λ podía ser arbitrariamente pequeña.

Por tanto, un teorema que restrinja el tamaño de E debe hacer hipótesis a nivel de dimensión cero. Esto es precisamente lo que ha hecho Suzuki [Suz]:

TEOREMA 0.8. **Si E es un compacto de capacidad logarítmica cero contenido en Δ, S es una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$ y $f \in H(\Delta - E, S)$, entonces f se extiende a una función de $H(\Delta, S)$.**

La restricción en el género no es gratuita, ya que si $S = \hat{\mathbf{C}}$, la conclusión falla de forma trivial con $E = \{0\}$ y $f(z) = exp(1/z)$. Lo mismo ocurre si $S = \mathbf{T} = \mathbf{C}/(\mathbf{Z} + i\mathbf{Z})$, $E = \{0\}$ y $f(z) = exp(1/z)/(\mathbf{Z} + i\mathbf{Z})$.

Como se ha comentado antes, la hipótesis sobre E de este teorema es del orden de magnitud correcto si queremos una condición que permita extender cualquier función de $H(\Delta - E, S)$ donde S es cualquier superficie de Riemann compacta de género mayor que uno. Pero las hipótesis sobre E pueden hacerse menos restrictivas si se impone alguna condición sobre la superficie compacta S.

Uno de los puntos de partida fue el teorema grande de Picard, que habla de singularidades aisladas ($E = \{0\}$ en dicho teorema). Se introduce ahora una medida de "cómo está de aislado" un punto de E. Se probará que si los puntos de E están "suficientemente aislados" (la suficiencia dependerá de S), las funciones de $H(\Delta - E, S)$ pueden extenderse a funciones de $H(\Delta, S)$.

Si E es un compacto y e es un punto de E, para cada $r > 0$ ya se ha definido $\beta(e, r)$ como

$$\beta(e, r) \equiv \frac{1}{r}\, inf\, \{s \,:\, \Delta(e, s) \cap E = \Delta(e, r) \cap E\},$$

y se define ahora

$$\beta^*(e) \equiv \liminf_{r \to 0} \beta(e, r).$$

Si S es una superficie de Riemann hiperbólica, se define la **sístole** de S (y se denota $Sis(S)$) como el ínfimo de las longitudes de las geodésicas cerradas. Por tanto, si γ es una curva cerrada en S no homótopa a cero, se tiene que

$$L_S(\gamma) \geq Sis(S).$$

Obsérvese que si S es compacta, entonces $Sis(S) > 0$.

Con esta notación, el siguiente teorema se escribe así:

TEOREMA H. Sea f una función de $H(\Delta - E, S)$, donde S es una superficie de Riemann compacta de género mayor que uno y E es un compacto de capacidad analítica cero, contenido en Δ. Si

$$\beta^*(e) < exp(-2\pi^2/Sis(S)),$$

para todo punto e de E, entonces f se extiende a una función de $H(\Delta, S)$.

Como corolario de la demostración también se tiene el siguiente enunciado más fuerte:

TEOREMA H'. Sea E un conjunto compacto de capacidad analítica cero contenido en Δ, y S una superficie de Riemann hiperbólica tal que $Sis(S) > 0$. Si f es una función de $H(\Delta - E, S)$, y se verifica que

$$\beta^*(e) < exp\left(\frac{-2\pi^2}{Sis(S)}\right)$$

para todo punto e de E, entonces f se extiende a una función de $H(\Delta, S)$.

Los teoremas 0.8 y H están relacionados pero ninguno contiene al otro. Para ver esto basta con encontrar un compacto E con $\beta^*(e) < \beta < 1$, para todo punto e de E, y que tenga capacidad logarítmica positiva. Pero se puede construir un ejemplo mucho más espectacular: existe un conjunto de Cantor de dimensión de Hausdorff uno, y tal que β^* se anula en todo punto.

Sería interesante conseguir un resultado que pudiera englobar estos dos teoremas. Por ejemplo: si $dim\, E \leq C(S)$, donde $C(S)$ es una constante que depende exclusivamente de la geometría de la superficie compacta S, entonces f tiene una extensión holomorfa a E.

Hasta ahora se han expuesto teoremas de extensión para funciones holomorfas con valores en superficies de Riemann compactas de género mayor que uno. Los argumentos excluían los casos de género cero y uno, debido a que la esfera y los toros no tienen métrica hiperbólica. Este obstáculo puede salvarse quitando a $\hat{\mathbf{C}}$ y a $\mathbf{T}$ un abierto, como se hizo en el corolario 1.1. Pero pueden imponerse condiciones mucho menos restrictivas quitando puntos a $\hat{\mathbf{C}}$ y a $\mathbf{T}$, aunque así no podrán obtenerse teoremas tan generales como los precedentes. Los conjuntos evitables satisfarán $\beta^* \equiv 0$, pero podrán tener dimensión de Hausdorff positiva (se tiene un ejemplo lineal de dimensión $1/5$, y se pueden conseguir conjuntos de dimensión mayor si se usan las posibilidades geométricas del plano, mucho más ricas que las de la recta).

Estos resultados conectan con otra clase de generalizaciones del teorema grande de Picard. Este teorema puede verse desde otro punto de vista:

Si E, F son compactos contenidos en el plano y existe una función holomorfa no constante $f : \hat{\mathbf{C}} - E \longrightarrow \hat{\mathbf{C}} - F$, ¿qué puede decirse acerca del "tamaño de F si se sabe que E es "pequeño"?

El teorema grande de Picard afirma que si el cardinal de E es finito y f tiene alguna singularidad, entonces F consta a lo sumo de dos puntos.

Existen muchas generalizaciones del teorema de Picard en este sentido (ver [Top] para una recopilación). Se ha probado que si $cap(E) = 0$ entonces se tiene necesariamente que $cap(F) = 0$. A mediados de siglo se esperaba poder probar el teorema de Picard con capacidad, es decir, que si $cap(E) = 0$, entonces F sería un conjunto finito. Pero Matsumoto [Mat] acabó por completo con esa esperanza: demostró que dado un cerrado cualquiera F de capacidad logarítmica cero, existen un cerrado E de capacidad logarítmica cero y una función holomorfa f, con singularidades en E, que omite F.

Esto parecía haber cerrado la cuestión, pero Carleson [Ca2] encontró un conjunto perfecto E de capacidad logarítmica positiva, tal que toda f con alguna singularidad omite a lo sumo tres puntos.

Los resultados de Matsumoto y Carleson dicen que la capacidad logarítmica no es la manera adecuada de medir los conjuntos para este problema; es necesario involucrar algo más, como pueda ser la geometría de los conjuntos, para obtener resultados.

Los siguientes teoremas generalizan el de Carleson, ya que mejoran su prueba al considerar la métrica de Poincaré:

TEOREMA I. **Dada una sucesión $\{a_k\}_{k=1}^{\nu+1}$ (ν puede ser un número natural o infinito, en cuyo caso se exigirá a la sucesión que tienda a ∞) de números complejos "bien distribuidos", existe una gran variedad de conjuntos de Cantor E "adecuados" tales que si $f : \hat{\mathbf{C}}-E \longrightarrow \mathbf{C}-\{a_k\}_{k=1}^{\nu+1}$ es holomorfa, entonces f se extiende a una función holomorfa en toda la esfera, y por tanto es racional.**

La demostración prueba de hecho que también hay extensión holomorfa si se sustituye $\hat{\mathbf{C}}-E$ por $D-E$, donde D es cualquier dominio que contiene a E. Si $\nu = \infty$, E puede elegirse con $dim\, E = 1/5$. Además, si $\nu = \infty$, $f \in H(D, \mathbf{C})$.

También se prueba un resultado de este tipo cuando la superficie de llegada es un toro cualquiera menos un punto.

TEOREMA J. **Si E es un conjunto de Cantor "adecuado" y f está en la clase $H(D-E, \mathbf{T}-\{p\})$, entonces f se extiende a una función de $H(D, \mathbf{T})$.**

Los enunciados precisos de estos teoremas están en la sección III.3, donde se hace una detallada descripción de los conjuntos de Cantor "adecuados", de las sucesiones "bien distribuidas", y de sus propiedades.

La organización del resto del capítulo es la siguiente: En la sección III.1 se prueban el teorema G y el corolario 1.1. El teorema H se demuestra en III.2. En la sección III.4 se prueban los teoremas I y J, y en la III.5 se demuestran los lemas usados en la sección anterior.

SECCION III.1. **Prueba del teorema G.**

TEOREMA G. **Si E es un compacto de capacidad analítica cero contenido en Δ, si $f \in H(\Delta - E, S)$ donde S es una superficie de Riemann, y si se verifica**
(a') S no es compacta y $f(\Delta - E)$ es relativamente compacto,
entonces f se extiende a una función de $H(\Delta, S)$.

Demostración: Si se define Y como $Y \equiv f(\Delta - E)$, entonces $\overline{Y}$ es un compacto de S.

Sea $h : S \to \hat{\mathbf{C}}$ una función holomorfa no constante y tal que no toma el valor ∞ en el compacto $\overline{Y}$. La existencia de una tal función está garantizada ya que S es una superficie de Riemann no compacta [Fo, p.203]. Este es el momento en el que el argumento deja de funcionar para las superficies compactas. Al ser h continua, $h(\overline{Y})$ es un compacto de $\mathbf{C}$, por lo que puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que $h(\overline{Y}) \subset \Delta$.

Ya que la función $g \equiv h \circ f$ está en la clase $H(\Delta - E, \Delta)$ y que la capacidad analítica de E es cero, g tiene una extensión holomorfa a todo el disco unidad, a la que se seguirá llamando g.

Sean ahora e un punto particular del conjunto E y $\{z_n\}$ una sucesión contenida en $\Delta - E$ y convergente al punto e. Como la sucesión $\{f(z_n)\}$ está contenida en el compacto $\overline{Y}$, existe una subsucesión $\{z_n^a\}$ tal que su imagen $\{f(z_n^a)\}$ converge a un punto s^a del compacto $\overline{Y}$. Evidentemente, la sucesión $h(f(z_n^a))$ converge a $h(s^a)$, pero como $g = h \circ f$ es holomorfa en todo el disco unidad, $g(z_n^a)$ también converge a $g(e)$. Por tanto se tiene que $h(s^a) = g(e)$.

El conjunto Λ de todos los s^a que son puntos de acumulación de la imagen mediante f de alguna sucesión convergente a e, ha de ser necesariamente finito, ya que Λ es un subconjunto del compacto $\overline{Y}$, h es holomorfa y no constante en $\overline{Y}$, y $h(\Lambda) = g(e)$. A continuación se probará que de hecho Λ se reduce a un único punto:

Sea $\Lambda = \{s^1, ..., s^k\}$, y sean $V_1, ..., V_k$ entornos disjuntos dos a dos de $s^1, ..., s^k$ respectivamente. Existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(\Delta(e, \varepsilon) - E) \subset \cup_{j=1}^k V_j.$$

Si no fuese así, para cada n natural existiría un punto $z_n \in \Delta(e, 1/n) - E$, tal que su imagen $f(z_n)$ no estaría en $\cup_j V_j$. Como los z_n constituyen una sucesión convergente a e, existe una subsucesión z_n^j tal que $f(z_n^j)$ converge a uno de los s^j, pero esto es imposible ya que $f(z_n) \notin V_j$, lo cual aporta la contradicción deseada.

Como la capacidad analítica de E es cero, E es totalmente disconexo, lo cual implica que $f(\Delta(e,\varepsilon) - E)$ es un conexo contenido en $\cup_j V_j$. Por tanto, existe un j tal que

$$f(\Delta(e,\varepsilon) - E) \subset V_j.$$

Si ahora se define $f(e) = s^j$, se verifica la igualdad

$$h \circ f = g$$

en todos los puntos del disco unidad.

Si en un punto $a \in E$ se tiene $dh|_{f(a)} \neq 0$, entonces existen un entorno V de $f(a)$ en el que h es univalente y un entorno U de a tal que $f(U) \subset V$. Entonces $f = h^{-1} \circ g$ en el abierto U, por lo que f es holomorfa en U.

Sean $b_1, ..., b_r$ todos los puntos críticos de h en $\overline{Y}$, y sea $A \equiv E \cap f^{-1}(\{b_1, ..., b_r\})$. Ya se ha probado que la extensión de f es holomorfa en $E - A$; también va a serlo en A:

Sea W_j un entorno simplemente conexo de b_j, con $W_1, ..., W_r$ disjuntos dos a dos. Sea a un punto del conjunto A. Si $f(a) = b_j$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(\Delta(a,\varepsilon) - A) \subset W_j.$$

Si $a_0 \in A \cap \Delta(a,\varepsilon)$, entonces $f(a_0) = b_j$, por lo que

$$f(\Delta(a,\varepsilon)) \subset W_j,$$

lo cual prueba que la extensión de f es continua en todo el disco unidad.

Como ya se ha visto, dado un punto $a \in A$, existe un ε_a con

$$f(\Delta(a,\varepsilon_a)) \subset W_j \qquad \text{para algún } j.$$

Como $\cup_{a\in A}\Delta(a,\varepsilon_a)$ cubre $A = E \cap f^{-1}(\{b_1, ..., b_r\})$, que es un compacto ya que f es continua, existen $a_1, ..., a_m$ con

$$A \subset \Omega \equiv \cup_{k=1}^{m}\Delta(a_j,\varepsilon_j).$$

Dado un $a \in A$, sea Ω_a la componente conexa de Ω que lo contiene. Entonces

$$f(\Omega_a) \subset W_j \qquad \text{para algún } j \in \{1, ..., r\}.$$

Como W_j es un entorno simplemente conexo de b_j, se sabe que existe una aplicación conforme $\eta_j : W_j \to \Delta$.

Entonces

$$\eta_j \circ f : \Omega_a \to \Delta$$

es continua en Ω_a y holomorfa y acotada en $\Omega_a - (A \cap \Omega_a)$. Como $A \cap \Omega_a$ es un compacto de capacidad analítica cero, entonces $\eta_j \circ f$ es holomorfa en a, por lo que f también es holomorfa en a. $\#TG$.

COROLARIO 1.1. **Sea E un compacto de capacidad analítica cero contenido en Δ, sea S una superficie de Riemann compacta y sea $f \in H(\Delta - E, S)$. Si existe un abierto no vacío $\mathcal{U}$ de S tal que $f(\Delta - E)$ tiene intersección vacía con $\mathcal{U}$, entonces f se extiende a una función de $H(\Delta, S)$.**

Demostración: La idea de la prueba es muy sencilla: se trata de encontrar una superficie S_0 que contenga a $f(\Delta - E)$ pero que no sea compacta, y entonces se podrá usar el teorema G.

Si S tiene género cero, entonces S está contenida en $\hat{\mathbf{C}}$ y la situación es la del caso clásico.

Si S tiene género positivo, se puede considerar un simplemente conexo V con frontera "suave" y tal que $\overline{V} \subset \mathcal{U}$. Sean $S_1 \equiv S - V$, que es una superficie con borde $\gamma \equiv \partial V$, y S_2 el doble de Schottky de S_1 [A-S, pp.26-27]. Si dotamos a S_2 de su métrica de Poincaré (cosa que podemos hacer, ya que S_2 tiene género mayor que 1), γ es una geodésica, por ser la reflexión en γ una isomería en S_2.

Sea $l \equiv L_{S_2}(\gamma)$ y sea A el anillo

$$A \equiv \{ 1 < |z| < exp(2\pi^2/l)\}$$

dotado de su métrica hiperbólica. La curva $\gamma' \equiv \{|z| = exp(\pi^2/l)\}$ tiene longitud l en A. Por tanto, si se corta A a lo largo de γ', S_2 a lo largo de γ y se pega una parte de A a S_1 (dotada de la métrica inducida como subconjunto de S_2, para la cual γ es una geodésica de longitud l), identificando las geodésicas frontera, se obtiene una superficie de Riemann S_0, no compacta, y tal que $S_1 \subset S_0$.

Como $f(\Delta - E)$ está contenido en S_1, que es un compacto contenido en S_0, f se extiende a una función de $H(\Delta, S_0)$. Como E está contenido en la frontera de $\Delta - E$, se tiene que $f(E)$ está contenido en S_1, por lo que f está en $H(\Delta, S)$. $\#C1.1.$

SECCION III.2. Prueba del teorema H.

Antes de comenzar la prueba, conviene hacer una observación sencilla pero que será muy útil, tanto en la demostración del teorema H como en el desarrollo posterior.

LEMA 2.1. **Si S es un dominio plano que contiene al anillo $A \equiv \{1 < |z| < R\}$, entonces se verifica la desigualdad siguiente:**

$$L_S(\{\, |z| = \sqrt{R}\}) \leq \frac{2\pi^2}{\log R}.$$

Demostración: Sea γ la geodésica simple cerrada en A, $\gamma \equiv \{\, |z| = \sqrt{R}\,\}$. Como ya se ha comentado en la introducción, la densidad de la métrica hiperbólica de A es

$$\lambda_A(z) = \frac{c}{|z|\, sen\,(c \log |z|)} \qquad \text{donde} \quad c \equiv \frac{\pi}{\log R}.$$

Esto implica que

$$L_A(\gamma) = \frac{2\pi^2}{\log R}.$$

Como ninguna curva cerrada no homótopa a cero en A, es más corta que γ, este cálculo justifica la segunda definición de módulo de un doblemente conexo que se dió en la introducción.

Ahora basta simplemente con observar que como A está contenido en S, se tiene que $L_S(\gamma) \leq L_A(\gamma)$. $\#L2.1.$

TEOREMA H. **Sea f una función de $H(\,\Delta{-}E,\, S\,)$, donde S es una superficie de Riemann compacta de género mayor que uno y E es un compacto de capacidad analítica cero, contenido en Δ. Si**

$$\beta^*(e) < exp(-2\pi^2/Sis(S)),$$

para todo punto e de E, entonces f se extiende a una función de $H(\,\Delta,\, S\,)$.

Demostración: Sea σ una curva cerrada cualquiera en $\Delta - E$. Lo que se pretende probar es que $f(\sigma)$ es homótopa a cero. Si se prueba esto, la función f admite una elevación $\tilde{f} : \Delta - E \longrightarrow \Delta$, tal que $f = \pi \circ \tilde{f}$, donde $\pi : \Delta \longrightarrow S$ es un recubrimiento universal. Esto es debido a que trivializa el grupo de homotopía [Mas].

Como E es un conjunto de capacidad analítica cero, $\tilde{f}$ se extiende a una función de $H(\Delta, \Delta)$, y consecuentemente $f = \pi \circ \tilde{f}$ se extiende a una función de $H(\Delta, S)$.

Por tanto, para probar el teorema H basta con probar que $f(\sigma)$ es homótopa a cero.

Si σ es homótopa a cero, el resultado es elemental.

Si σ rodea un subconjunto cerrado F de E, dado cualquier $e \in F$, existe un radio positivo $r_e < d(\sigma, F)$ tal que $\beta \equiv \beta(e, r_e) < exp(-2\pi^2/Sis(S))$. Evidentemente se tiene que

$$F \subset \cup_{e \in F} \overline{\Delta}(e, r_e \beta),$$

y como F es compacto, existen $\{e_1, ..., e_k\}$ tales que

$$F \subset \cup_{j=1}^{k} \overline{\Delta}(e_j, r_j \beta_j).$$

Sean γ_j las curvas $\gamma_j \equiv \{ |z - e_j| = r_j \sqrt{\beta_j} \}$. Como los anillos $\{ r_j \beta_j < |z - e_j| < r_j \}$ están contenidos en $\Delta - E$, y son conformemente equivalentes (y por tanto isométricos) a los anillos $\{1 < |z| < 1/\beta_j\}$, el lema 2.1 implica que

$$L_{\Delta\text{-}E}(\gamma_j) \leq \frac{2\pi^2}{log(1/\beta_j)} < Sis(S),$$

y entonces se tiene que

$$L_S(f(\gamma_j)) \leq L_{\Delta\text{-}E}(\gamma_j) < Sis(S).$$

Como cualquier curva no homótopa a cero en S tiene longitud mayor o igual que $Sis(S)$, se deduce que $f(\gamma_j)$ es homótopa a cero. Para finalizar, sólo falta observar que como σ es libremente homótopa a la unión de las γ_j's, $f(\sigma)$ es libremente homótopa a la unión de las $f(\gamma_j)$'s, y por ello, homótopa a cero. $\#TH$.

SECCION III.3. Exposición de los teoremas I y J.

Si S es una superficie de Riemann con alguna puntura, entonces se tiene inmediatamente que $Sis(S) = 0$. Puede definirse para las superficies con punturas un nuevo concepto, al que se denominará $Sis_p(S)$, que es el ínfimo de las longitudes de todas las curvas en S que no son homótopas a cero ni a una puntura. Esta traslación del concepto de sístole va a jugar exactamente el mismo papel que $Sis(S)$ en las superficies con punturas, aunque evidentemente, las cosas serán ahora más laboriosas.

Antes que nada, interesa caracterizar los dominios planos S tales que $Sis_p(S) > 0$, ya que estos resultados serán necesarios para enunciar el teorema I. Primeramente se expone el lema geométrico que es el instrumento principal de los cálculos posteriores:

LEMA 3.1. **Si γ es una curva cerrada en $\mathbf{C} - \{a, b\}$ que rodea a a y a b, y se tiene que $d(a, \gamma) \leq c$, entonces**

$$L_{\mathbf{C}-\{a,b\}}(\gamma) \geq 2\, Argsenh\left(\frac{\pi}{4.76 + log^+ \frac{c}{|b-a|}} \right),$$

donde log^+ denota la parte positiva del logaritmo, lo cual quiere decir que se define como $log^+ x \equiv max\,(0, log\, x)$.

Como corolario de este lema se tiene la caracterización que se buscaba.

PROPOSICION 3.2. **Si S es un subdominio de $\hat{\mathbf{C}}$, las siguientes condiciones son equivalentes:**

(i) $Sis_p(S) > 0$,

(ii) existe una constante α_1 que acota superiormente el módulo de cualquier dominio doblemente conexo A, contenido en S, que separa ∂S "de dos en dos",

(iii) existe una constante α_2 que acota superiormente el módulo de cualquier anillo A, contenido en S, que separa ∂S "de dos en dos",

(iv) existe una constante α_3 que acota superiormente el módulo de cualquier anillo A, centrado en un punto de ∂S y contenido en S, que separa ∂S "de dos en dos".

Aquí, al afirmar que A "separa de dos en dos" ∂S, quiere decirse que A deja al menos dos puntos de ∂S "dentro" y al menos otros dos "fuera". Más precisamente, la frontera de A determina dos dominios simplemente conexos que tienen intersección vacía con A, y se exige que en cada uno de esos dominios haya al menos dos puntos de ∂S.

Por lo que respecta a esta proposición, ∞ no es un punto especial si se definen los anillos "centrados en ∞" como los anillos centrados en 0. Por supuesto, daría exactamente igual definirlos centrados en cualquier otro número complejo fijo.

Al seguir la prueba se observa que unas constantes se acotan en función de otras.

La equivalencia entre (i) y (ii) se prueba con ayuda del lema 3.1 y siguiendo las ideas que Pommerenke [Po1] usa para caracterizar los dominios modulados Ω como aquellos para los que $Sis(\Omega) > 0$.

La equivalencia entre (ii) y (iii) la da el teorema de Teichmüller que afirma que un doblemente conexo de módulo muy grande contiene un anillo euclídeo de módulo muy grande (todos los elementos e ideas necesarios para la prueba están en [A, pp.71-74]).

La equivalencia entre (iii) y (iv) es elemental.

A continuación se describen los dominios planos que son el objeto del teorema I:

Sea $\Omega \equiv \mathbf{C} - \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, donde $\{a_k\}$ es una sucesión cuyos módulos tienden a ∞ y tal que $Sis_p(\Omega) < \infty$. Entonces, si $\Omega_M \equiv \mathbf{C} - \{a_k\}_{k=1}^{M+1}$, se exigirá que exista una constante positiva $B \leq Sis_p(\Omega)$ independiente de M y tal que

$$Sis_p(\Omega_M) \geq B. \tag{3.1}$$

Esta condición se satisface si, por ejemplo, existen constantes $C_2 > C_1 > 1$, tales que $C_1|a_k| \leq |a_{k+1}| \leq C_2|a_k|$, y lo mismo ocurre si $a_k = k^\alpha$ para cualquier $\alpha > 0$ (no resulta difícil comprobar en ambos casos que se verifica la condición **(iv)** de la proposición 3.2).

Si se exige que $Sis_p(\Omega) > 0$, entonces se tiene automáticamente que existe una constante C tal que $|a_{k+1}| \leq C|a_k|$ (esta condición podría expresarse como $\beta^*(\infty) > 0$, en analogía con lo ya definido). Bajo esta hipótesis, se pueden encontrar constantes $C_2 > C_1 > 1$ y una subsucesión $\{b_k\} \subset \{a_k\}$, tales que $C_1|b_k| \leq |b_{k+1}| \leq C_2|b_k|$. Por tanto, si una sucesión es tal que $Sis_p(\Omega) > 0$, siempre puede encontrarse una subsucesión que verifique (3.1).

Dada una sucsesión $\{a_k\}$, se define

$$\rho_N \equiv max\left\{|a_{N+1}|,\ max\left\{\frac{|1+a_k\overline{a_j}|}{|a_k - a_j|}\ :\ j,k = 1,2,...,N,N+1,\ \ y\ j \neq k\right\}\right\}.$$

Si $a_k = C^k$, entonces $\rho_N \asymp C^N$.
Si $a_k = k^\alpha$, entonces $\rho_N \asymp N^{\alpha+1}$.

Se describen a continuación los conjuntos de Cantor E con los que se tratará en adelante.

E es la intersección de los conjuntos cerrados $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$, donde E_0 es una bola. E_1 está contenido en la unión de las bolas disjuntas contenidas en E_0 : $\{B^j\}$, con $j = 1, ..., N_1$. E_2 es un conjunto cerrado contenido en la unión de las bolas disjuntas $\{B^{j_1 j_2}\}$, con $j_1 = 1, ..., N_1$, $j_2 = 1, ..., N_2$, y tales que $B^{j_1 j_2} \subset B^{j_1}$. E_n es un conjunto cerrado contenido en la unión de las bolas disjuntas $\{B^{j_1 \cdots j_{n-1} j_n}\}$, con $j_1 = 1, ..., N_1$, ... , $j_n = 1, ..., N_n$, y tales que $B^{j_1 \cdots j_{n-1} j_n} \subset B^{j_1 \cdots j_{n-1}}$.

Hay que imponer algunas restricciones a estas bolas. Si se denota por $b_{j_1 \ldots j_n}$ el centro de la bola $B^{j_1 \cdots j_n}$, se exigirá que

$$radio(B^{j_1 \cdots j_n}) \leq r_n,$$

$$d(\, b_{j_1 \ldots j_n},\, B^{k_1 \ldots k_n}\,) \geq R_n$$

para todos los $j_1, ..., j_n, k_1, ..., k_n$ tales que $b_{j_1 \ldots j_n}$ no es el centro de la bola $B^{k_1 \ldots k_n}$.

Se permite que alguna bola sea el conjunto vacío, y por supuesto, no será tenida en cuenta para calcular r_n y R_n. Es decir, una bola de la generación $n-1$ tendrá a lo sumo N_n hijos; también se exige que haya alguna bola de esa generación que tenga exactamente N_n hijos, y que N_n sea mayor que 1.

Las bolas de centro $b_{j_1 \ldots j_n}$ y radio $R_n/2$ son disjuntas y al menos la tercera parte de su área está contenida en su madre $B^{j_1 \cdots j_{n-1}}$. Esto proporciona la desigualdad

$$N_n\, R_n^2 < 12\, r_{n-1}^2.$$

Si se define $\mu_n \equiv \varepsilon_n^{-1} \equiv R_n/r_n$, y se pide que ε_n tienda a 0, entonces se tiene inmediatamente que tanto r_n como R_n tienden también a 0.

Como

$$r_n = R_n\, \varepsilon_n < \frac{4\, \varepsilon_n\, r_{n-1}}{\sqrt{N_n}},$$

se tiene, si se denota por M_α el contenido α-dimensional, que

$$M_\alpha(E) \leq N_1 ... N_N\, r_n^\alpha < \left(2^{2\alpha} N_1^{1-\alpha/2} \varepsilon_1^\alpha\right) ... \left(2^{2\alpha} N_n^{1-\alpha/2} \varepsilon_n^\alpha\right)\, r_0.$$

Por tanto, si $N_n^{2-\alpha} \varepsilon_n^{2\alpha}$ tiende a 0, entonces $dim\, E \leq \alpha$. Consecuentemente, si $N_n^2 \varepsilon_n$ tiende a 0, hipótesis que se hará enseguida, se tiene que $dim\, E \leq 2/5$, y que la capacidad analítica de E es cero.

Ya se está en condiciones de enunciar los teoremas I y J.

Sean E un conjunto de Cantor de los que acaban de describirse, tal que $\nu \equiv sup_n N_n$ (ν puede ser finito o infinito), y D un dominio de la esfera que contiene a E. Sea $\{a_k\}_{k=1}^{\nu+1}$ una sucesión que verifica (3.1), y sea la sucesión $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida de la siguiente manera: $\alpha_n \equiv \rho_{N_n}(\varepsilon_{n-1}^{1/2} + N_n\, \varepsilon_n^{1/2})$.

TEOREMA I. **Si $f \in H(D-E, \Omega)$ y $\sum_n \alpha_n < \infty$, entonces f se extiende a una función de $H(D, \hat{\mathbf{C}})$.**

Si $\nu = \infty$, f se extiende a una función de $H(D, \mathbf{C})$.

Si $\nu < \infty$, la condición $\sum_n \alpha_n < \infty$ es equivalente a $\sum_n \varepsilon_n^{1/2} < \infty$, y no es necesario exigir que se verifique (3.1).

Sean p un punto de un toro $\mathbf{T}$ y E un conjunto de Cantor como los que se acaban de describir.

TEOREMA J. **Si E es tal que $\sum_n(N_n^3\varepsilon_n^{1/2} + N_n^2\varepsilon_{n-1}^{1/2}) < \infty$ y $f \in H(D-E, \mathbf{T}-\{p\})$, entonces f se extiende a una función de $H(D, \mathbf{T})$.**

SECCION III.4. Prueba de los teoremas I y J.

Sean E un conjunto de Cantor de los que se han descrito en la sección III.3, tal que $\nu \equiv sup_n N_n$ (ν puede ser finito o infinito), y D un dominio de la esfera que contiene al conjunto E. Sea $\{a_k\}_{k=1}^{\nu+1}$ una sucesión que verifica (3.1), y sea la sucesión $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida como $\alpha_n \equiv \rho_{N_n}(\varepsilon_{n-1}^{1/2} + N_n \varepsilon_n^{1/2})$.

TEOREMA I. Si $f \in H(D-E, \Omega)$ y $\sum_n \alpha_n < \infty$, entonces f se extiende a una función de $H(D, \hat{C})$.

Si $\nu = \infty$, f se extiende a una función de $H(D, C)$.

Si $\nu < \infty$, la condición $\sum_n \alpha_n < \infty$ es equivalente a $\sum_n \varepsilon_n^{1/2} < \infty$, y no es necesario pedir que se verifique (3.1).

Antes de comenzar con la prueba del teorema I, conviene realizar unas observaciones que serán de utilidad en el desarrollo posterior.

Como E es un conjunto compacto y ∂D es un conjunto cerrado, existe una constante $c_0 > 0$ tal que

$$|p - q| \geq c_0 \qquad \text{para cualesquiera puntos} \quad p \in E, \ q \in \partial D.$$

Si D es el plano complejo o la esfera de Riemann, se toma $c_0 = \infty$.

Se define el número α_0 como

$$\alpha_0 \equiv exp\left(\frac{\pi^2}{2\, Argsenh(1/4)}\right) > 4 \times 10^8.$$

(a) Se elige un número real cualquiera α que sea mayor que α_0 (tómese por ejemplo $\alpha = \alpha_0 + 1$).

Se elige un número natural n_0 suficientemente grande como para que si $n \geq n_0 - 1$, se verifiquen las siguientes condiciones:

(A) $\mu_n \geq 2\alpha^2$.

Esto implica que $\mu_n = R_n/r_n > 1$, y por tanto puede considerarse el anillo

$$A_{j_1 \dots j_n} \equiv \{r_n < |z - b_{j_1 \dots j_n}| < r_n \mu_n\}$$

al que se denotará, siempre que no haya ambigüedades, para simplificar la notación,

$$A = \{r < |z - b| < r\mu\}.$$

Esto también implica que $\mu_n > \alpha^2$, y que puede considerarse el anillo

$$A^{\alpha}_{j_1\dots j_n} \equiv \{\alpha r_n < |z - b_{j_1\dots j_n}| < r_n\mu_n/\alpha\} \subset A_{j_1\dots j_n}$$

o para simplificar

$$A^{\alpha} = \{\alpha r < |z-b| < r\mu/\alpha\}.$$

(B) $r_n + R_n < c_0$.

Esto implica que el anillo A está propiamente contenido en el dominio $D-E$.

Se llama τ_N (respectivamente τ) a $Sis_p(\Omega_N)$, donde $\Omega_N \equiv \mathbf{C}-\{a_k\}_{k=1}^{N+1}$ (respectivamente $Sis_p(\Omega)$, donde $\Omega \equiv \mathbf{C} - \{a_k\}_{k=1}^{\nu+1}$). Obsérvese que Ω_N es la esfera con N+2 punturas, ya que $a_0 = \infty$ es una puntura en Ω_N, aunque no lo es en Ω si $\nu = \infty$.

(C) $\mu_n \geq exp(2\pi^2/B)$ donde B es la constante que aparece en (3.1). Con esta notación,

$$\tau_N \geq B \qquad \text{para todo } N \qquad \text{y} \qquad \tau \geq B.$$

Demostración: Se define para cada $s \in [\alpha, \mu/\alpha]$, la curva $\gamma_s \equiv \{|z-b| = rs\}$, y se designa como γ a $\gamma_{\sqrt{\mu}}$. La curva γ es una geodésica, tanto para la métrica de A como para la de A^{α} (en un anillo, la única circunferencia que es una geodésica es la "media geométrica" de sus curvas frontera). Como se vió en la introducción, la densidad de la métrica hiperbólica en el anillo A es

$$\lambda_A(z) = \frac{c}{|z-b|\, sen\left(c\, log\frac{|z-b|}{r}\right)} \qquad \text{donde} \quad c \equiv \frac{\pi}{log\,\mu}.$$

Esto permite deducir inmediatamente que

$$L_A(\gamma_s) = \frac{2\pi c}{sen\,(c\,log\,s)}, \tag{4.1}$$

lo que da la acotación

$$L_A(\gamma_s) \leq L_A(\gamma_\alpha) < \frac{\pi^2}{log\,\alpha} \equiv c_1(\alpha). \tag{4.1'}$$

Sea ahora un número natural $N \geq 3$ fijo. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} L_{\Omega_N}(f\gamma_s) &\leq L_{D-E}(\gamma_s) < L_A(\gamma_s) < c_1(\alpha), \\ diam_{\Omega_N}(f\gamma_s) &< \frac{1}{2}c_1(\alpha), \qquad \text{para todo } s \in [\alpha, \mu/\alpha]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Las dos primeras desigualdades se tienen porque f y la inclusión son holomorfas, y la tercera por (4.1').

Para cada $t > 1$, se considera el collar de área t^{-1}, $C_i \equiv C_i^t$ en Ω_N alrededor de la puntura a_i (recuérdese que $a_0 = \infty$). Todos los C_i son disjuntos dos a dos e isométricos a la región $[0,1) \times (t, \infty)$ en U con su métrica de Poincaré, si se identifican las componentes verticales de su frontera. Esto da

$$d_{\Omega_N}(C_i, C_j) \geq 2 \int_1^t \frac{dy}{y} = 2\, log\, t \equiv c_2(t) \equiv 2\, c_1(\alpha). \tag{4.3}$$

Se sabe que

$$L_{\Omega_N}(f\gamma) < L_A(\gamma) = \frac{2\,\pi^2}{log\,\mu} \leq r_N,$$

donde la igualdad se deduce de (4.1), tomando $s = \sqrt{\mu}$, y la última desigualdad de (C), ya que se tiene

$$\mu \geq exp(2\pi^2/B) \geq exp(2\pi^2/r_N).$$

Esto quiere decir que $f\gamma$ es homótopa a un punto de Ω_N o a una puntura de Ω_N. Obsérvese que si $\nu = \infty$, $f\gamma$ no puede ser homótopa a ∞, aunque ∞ es una puntura de Ω_N, ya que el mismo argumento, sustituyendo Ω por Ω_N, implica que $f\gamma$ es homótopa a un punto o a una puntura de Ω, e ∞ no es una puntura de Ω en este caso.

Se tiene el siguiente resultado.

LEMA 4.1. **En esta situación, existe a lo sumo un $j \in \{0, 1, ..., N+1\}$ tal que**

$$d_{\Omega_N}(fA^\alpha, C_j) \leq \frac{1}{4} c_2(t),$$

si A^α es el anillo que rodea a γ.

Si γ^0 es la curva central de un anillo de la generación $n-1$ (es decir, γ^0 rodea un $B^{j_1 \cdots j_{n-2} j_{n-1}}$ pero no rodea ningún $B^{j_1 \cdots j_{n-2}}$), sean $\gamma_1, ..., \gamma_{N_n}$ sus hijas, alguna de las cuales puede ser el conjunto vacío, y sea $N \equiv N_n$ de ahora en adelante, si $\nu = \infty$, $N \equiv \nu$ si $\nu < \infty$.

Se define el dominio Λ como

$$\Lambda \equiv Int\,\gamma^0 - \cup_{j=1}^N \overline{Int\,\gamma^j},$$

donde

$$Int\,\gamma \equiv \{z \in \mathbf{C} :\ n(z,\gamma) \neq 0\},$$

si $n(z,\gamma)$ es el índice de la curva γ con respecto al punto z.

No es más que un cálculo el verificar (usando que r_n es no creciente y que $\mu_n > 9$) que Λ está bien definido, es decir, que $\gamma^j \subset Int\,\gamma^0$.

Considérese ahora f como una función $f : \overline{\Lambda} \to \Omega_N$. El lema 4.1 asegura que para cada $i \in \{0, 1, ..., N\}$, existe a lo sumo un $j \equiv j(i) \in \{0, 1, ..., N+1\}$ tal que

$$d_{\Omega_N}(\, f A_i^\alpha, C_j(i)\,) \leq \frac{1}{4} c_2(t).$$

Por tanto, existe un $j \in \{0, 1, ..., N+1\}$ tal que

$$d_{\Omega_N}(\, f A_i^\alpha, C_j\,) > \frac{1}{4} c_2(t), \qquad \text{para todo } i \in \{0, 1, ..., N\}.$$

Sea ahora $T = T_j$ la tansformación de Möbius

$$T_j z \equiv \frac{1 + z\,\overline{a_j}}{z - a_j} \qquad \text{si } j > 0 \qquad \text{y} \qquad T_0 z \equiv z.$$

T es una rotación de la esfera de Riemann que lleva a_j en $a_0 = \infty$.

Obsérvese que la región plana $\{\, |w| > \rho_N\}$ está contenida en $T\Omega_N$.

LEMA 4.2. **Sean la superficie de Riemann $S \equiv \mathbf{C} - G$, donde G es un cerrado contenido en $\overline{\Delta}_R$ y C^t el collar en S alrededor de la puntura en ∞. Entonces**

$$\{\, |z| \geq R e^{2\pi t}\} \subset C^t.$$

Si z es un punto de $\cup_{i=0}^N A_i^\alpha$, como $f(z) \notin C_j$, entonces $Tf(z) \notin TC_j$, y aplicando el lema 4.2, se tiene que

$$|Tf(z)| < \rho_N\, e^{2\pi t}.$$

LEMA 4.3. **Sean el anillo $A \equiv \{\, \rho \leq |z - a| \leq \rho\, k\}$, donde $k \geq 2$, y la curva $\gamma \equiv \{|z - a| = \rho\sqrt{k}\}$. Si g es una función holomorfa en A y tal que $|g(z)| \leq M$ para todo $z \in A$, entonces**

$$diam\,(g\gamma) < \frac{24\pi M}{\sqrt{k}}.$$

Por tanto, se tiene que

$$diam\,(Tf\gamma^i) < \frac{24\,\pi\,\rho_N\, e^{2\pi t}}{\sqrt{\mu/\alpha^2}} = C\,\rho_N\,\varepsilon^{1/2}, \qquad \text{para } i \in \{0, 1, ..., N\},$$

si $C \equiv 24\,\pi\,\alpha\, e^{2\pi t}$. Por tanto,

$$diam\,(Int\, Tf\gamma^i) < C\,\rho_N\,\varepsilon^{1/2}.$$

Si ahora se considera en la esfera de Riemann $\hat{\mathbf{C}}$ la métrica $ds = \lambda_{\hat{\mathbf{C}}}|dz|$, donde

$$\lambda_{\hat{\mathbf{C}}}(z) = \frac{1}{1 + |z|^2} \leq 1,$$

entonces se deduce de la igualdad anterior,

$$diam\,(\overline{Int\,Tf\gamma^i}) < C\,\rho_{N_n}\,\varepsilon_n^{1/2}, \qquad \text{si } i \in \{1,...,N\}$$

y

$$diam\,(\overline{Int\,Tf\gamma^0}) < C\,\rho_{N_n}\,\varepsilon_{n-1}^{1/2}.$$

Para acabar este razonamiento sólo falta aplicar un último lema.

LEMA 4.4. **Sea Λ un dominio plano limitado por $k+1$ curvas de Jordan disjuntas: γ^0 (la exterior), $\gamma^1,...,\gamma^k$. Sea $g:\overline{\Lambda}\to \mathbf{C}$ analítica. Entonces**

$$g(\Lambda) \subset \cup_{j=0}^{k} Int\, g\gamma^j.$$

Aplicando el lema 4.4,

$$Tf\Lambda \subset \cup_{i=0}^{N} Int\,Tf\gamma^i,$$

y teniendo en cuenta que T es una isometría para la métrica esférica,

$$diam_{\hat{\mathbf{C}}}(f\Lambda) = diam_{\hat{\mathbf{C}}}(Tf\Lambda) \leq \sum_{i=0}^{N} diam_{\hat{\mathbf{C}}}(\overline{Int\,f\gamma^i}) < C\,\rho_{N_n}(\varepsilon_{n-1}^{1/2} + N_n\varepsilon_n^{1/2}) = C\alpha_n,$$

donde la primera desigualdad se debe a que $Tf\Lambda$ es conexo.

Por tanto, se tiene que

$$diam_{\hat{\mathbf{C}}}(f\Lambda) < C\alpha_n \qquad \text{donde} \quad \sum_n \alpha_n < \infty.$$

Esta condición garantiza que f tiene una extensión continua a D:

Dado un punto $e \in E$ fijo, existe una sucesión de curvas $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ que rodean e, tales que γ_n es de la generación n y que γ_{n+1} es hija de γ_n. Sea Λ_n el dominio acotado por γ_n y sus hijas, y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos en D tal que $x_n \in \Lambda_n$. Entonces

$$d_{\hat{\mathbf{C}}}(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq diam_{\hat{\mathbf{C}}}(f\Lambda_n) + diam_{\hat{\mathbf{C}}}(f\Lambda_{n+1}) < C\,\alpha_{n+1} + C\,\alpha_{n+2},$$

y

$$d_{\hat{\mathbf{C}}}(f(x_n), f(x_{n+m})) < 2C \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k.$$

Esto permite afirmar que $f(x_n)$ es una sucesión de Cauchy en $\hat{\mathbf{C}}$, por lo que existe un $w_e \in \hat{\mathbf{C}}$ tal que $f(x_n)$ converge a w_e, y además se tiene que

$$d_{\hat{\mathbf{C}}}(f(x_n), w_e) \leq 2C \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k.$$

Como es natural, se define $f(e) = w_e$, y se comprueba que f es continua en e:

Para ello, dado un $\varepsilon > 0$, se considera una sucesión de dominios Λ_n como antes. Puede elegirse un M tal que

$$2C \sum_{k=M+1}^{\infty} \alpha_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se considera la curva γ que es la frontera exterior de Λ_M; por tanto, γ es de la generación M. Se probará a continuación que si $z \in Int\,\gamma$, entonces $f(z)$ dista menos que ε de $f(e)$.

Sea un $z \in Int\,\gamma$ fijo, y un punto cualquiera z_0 de γ. Sea $e_0 \in E$ tal que z pertenece al conjunto $\{e_0\} \cup \{\cup_{n=M}^{\infty} \Lambda_n^0\}$, donde Λ_n^0 son los dominios que "convergen" a e_0. Entonces se tiene que

$$d_{\hat{\mathbb{C}}}(f(z), f(e)) \leq d_{\hat{\mathbb{C}}}(f(z), f(z_0)) + d_{\hat{\mathbb{C}}}(f(z_0), f(e)) \leq 2C \sum_{M+1}^{\infty} \alpha_k + 2C \sum_{M+1}^{\infty} \alpha_k < \varepsilon.$$

Esto termina la prueba de la continuidad. Ahora, dado un punto $e \in E$, se verá que f es holomorfa en un entorno suyo.

Existe un M tal que

$$2C \sum_{M+1}^{\infty} \alpha_k < \frac{\pi}{16};$$

por tanto, si γ es la frontera exterior de Λ_M^e, y $z \in Int\,\gamma$ que es un entorno de e, se tiene que

$$d_{\hat{\mathbb{C}}}(f(z), f(e)) < \frac{\pi}{8}$$

y

$$diam_{\hat{\mathbb{C}}}(f(Int\,\gamma)) < \frac{\pi}{4},$$

es decir, $f(Int\,\gamma)$ está contenido en un hemisferio de $\hat{\mathbb{C}}$ (recuérdese que con esta métrica el diámetro de $\hat{\mathbb{C}}$ es $\frac{\pi}{2}$). Por tanto, existe una transformación de Möbius T, que además es una isometría esférica, tal que $Tf : Int\,\gamma \longrightarrow \Delta$. Como $dim\,E < 2/5$, la capacidad analítica de E es cero, y Tf se extiende analíticamente en $Int\,\gamma$. Por tanto, f es holomorfa en e.

Para acabar la prueba falta ver que si $\nu = \infty$, entonces f no toma el valor ∞. Si $z \in D - E$, evidentemente $f(z) \neq \infty$. Si existiera un $e \in E$ tal que $f(e) = \infty$, se define la función

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a_1}, \qquad \text{que verifica} \quad g(e) = 0.$$

Sean $\Omega_0 \equiv g(\Omega)$ y $\varepsilon \equiv min\,\{|a_2 - a_1|^{-1}, |a_3 - a_1|^{-1}\}$.

Como g es continua, existe un $\delta > 0$ tal que si $|z - e| < \delta$, entonces $|g(z)| < \varepsilon$.

Existe una curva γ que rodea el punto e, de una generación suficientemente grande tal que $\gamma \subset \Delta(e, \delta)$ y $L_{D-E}(\gamma) < \tau$, por lo que

$$L_{\Omega_0}(g\gamma) < \tau \qquad \text{y} \qquad g\gamma \subset \Delta(0, \varepsilon).$$

Por tanto, γ no rodea $(a_2 - a_1)^{-1}$ ni $(a_3 - a_1)^{-1}$, pero sí que rodea 0, por el teorema de la aplicación abierta, y por tanto, a una infinidad de los $(a_n - a_1)^{-1}$. Como rodea dos puntos y deja de rodear otros dos, se tiene que

$$\tau \equiv Sis_p(\Omega) = Sis_p(\Omega_0) \leq L_{\Omega_0}(g\gamma) < \tau,$$

lo cual es una contradicción. $\#TI$.

Con el teorema I ya probado, la demostración del teorema J resulta sencilla.

Sean p un punto de un toro $\mathbf{T}$ y E un conjunto de Cantor como los que se han descrito en la sección III.3.

TEOREMA J. **Si E es tal que $\sum_n (N_n^3 \varepsilon_n^{1/2} + N_n^2 \varepsilon_{n-1}^{1/2}) < \infty$ y $f \in H(D-E, \mathbf{T}-\{p\})$, entonces f se extiende a una función de $H(D, \mathbf{T})$.**

Demostración: Sea γ una curva cerrada cualquiera en $D-E$. Como $E \cap Int\,\gamma$ es un compacto, existe un número finito de curvas $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$ tales que γ es libremente homótopa a la suma $\gamma_1 + \ldots + \gamma_m$ y $L_{D-E}(\gamma_i) < Sis_p(\mathbf{T}-\{p\})$. Basta repetir la construcción usada en la prueba del teorema I.

Como $L_{\mathbf{T}-\{p\}}(f\gamma_i) \leq L_{D-E}(\gamma_i) < Sis_p(\mathbf{T} - \{p\})$, entonces $f\gamma_i$ es homótopa a cero en $\mathbf{T}$, y por tanto, $f\gamma$ es homótopa a cero en $\mathbf{T}$.

$\mathbf{T}$ es conformemente equivalente a $\mathbf{C}/\Gamma$ donde Γ es el grupo generado por $\gamma_1(z) = z + 1$ y $\gamma_2(z) = z + \zeta_0$, para algún $\zeta_0 \in \mathbf{C}$, y podemos suponer que en esta identificación p se corresponde con 0. Sea entonces $\pi : \mathbf{C} \to \mathbf{T}$ el recubrimiento universal con $\pi(0) = p$.

Como $f : D-E \longrightarrow \mathbf{T}$ es homotópicamente trivial, existe un elevamiento $\tilde{f}$ de f. Como $f = \pi \circ \tilde{f}$ no toma el valor p, $\tilde{f}$ no toma los valores $\pi^{-1}(p) = \Gamma(0) \supset \mathbf{N}$. Por tanto,

$$\tilde{f} : D-E \longrightarrow \mathbf{C}-\mathbf{N} \qquad \text{con} \qquad \rho_N \leq N^2.$$

Por el teorema I, se sabe que $\tilde{f}$ tiene una extensión holomorfa, que también es analítica, ya que $\mathbf{N}$ es infinito. Por tanto, $f = \pi \circ \tilde{f}$ se extiende a una función de $H(D, \mathbf{T})$. $\#TJ$.

SECCION III.5. Prueba de los lemas usados en la sección III.4.

Se comienza con la prueba del lema 4.1.

LEMA 4.1. **En esta situación, existe a lo sumo un $j \in \{0, 1, ..., N+1\}$ tal que**

$$d_{\Omega_N}(fA^\alpha, C_j) \leq \frac{1}{4}c_2(t),$$

si A^α es el anillo que rodea a γ.

Para organizar la demostración será conveniente probar unos cuantos lemas previos.

LEMA 5.1. **Si σ es una curva cerrada en U, entonces**

$$diam_U(\overline{Int\,\sigma}) \leq \frac{1}{2}L_U(\sigma).$$

Demostración: Como $\overline{Int\,\sigma}$ es un compacto, existen puntos p, $q \in \overline{Int\,\sigma}$ tales que $diam_U(\overline{Int\,\sigma}) = d_U(p,q)$. Si p, q son ambos puntos frontera, la demostración está acabada, ya que como σ conecta dos veces p con q, se tiene que $L_U(\sigma) \geq 2\,d_U(p,q)$.

Aunque intuitivamente es claro que p, $q \in \partial(\overline{Int\,\sigma})$, el siguiente argumento indica cómo probarlo:

Si alguno de ellos está en $Int\,\sigma$, se considera la geodésica que los une, y se prolonga hasta llegar a σ. De esta manera se obtiene un punto más lejano, lo cual es una contradicción. $\#L5.1$.

LEMA 5.2. **Si σ es homótopa a cero en una superficie de Riemann $S \subset \mathbf{C}$, entonces**

$$diam_S(\overline{Int\,\sigma}) \leq \frac{1}{2}L_S(\sigma).$$

Demostración: Sea $\pi : U \to S$ un recubrimiento universal. Como σ es homótopa a cero en S, su antiimagen por π es una unión numerable de curvas cerradas. Sea γ una cualquiera de ellas. Vamos a ver que

$$Int\,\sigma \subset \pi(Int\,\gamma).$$

Si a es un punto de $Int\,\sigma$ y $B \equiv \{b : \pi(b) = a\}$, entonces

$$0 \neq n(\sigma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{dw}{w-a} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\pi'(z)\,dz}{\pi(z)-a} = \sum_{b\in B} n(\gamma, b).$$

La segunda igualdad es un simple cambio de variable, y la tercera es una aplicación del principio del argumento, en la que no aparecen los polos ya que π es analítica.

Esto implica que tiene que existir al menos un punto $b \in U$ tal que su imagen por π sea a y que $n(\gamma, b) \neq 0$, es decir, que b sea un punto de $Int\,\gamma$. Por tanto, $a = \pi(b)$ es un punto de $\pi(Int\,\gamma)$, y como $\partial\pi(Int\,\gamma)$ está contenida en $\pi(\partial\, Int\,\gamma)$, ya que π es una función continua y abierta, se tiene también que

$$\overline{Int\,\sigma} \subset \pi(\overline{Int\,\gamma}).$$

Por tanto,

$$diam_S(\overline{Int\,\sigma}) \leq diam_S(\pi(\overline{Int\,\gamma}) \leq diam_U(\overline{Int\,\gamma}) \leq \frac{1}{2}L_U(\gamma) = \frac{1}{2}L_S(\sigma),$$

y ya se tiene el resultado que se quería. La segunda desigualdad es cierta ya que π es holomorfa, y la tercera es el lema 5.1. $\#L5.2.$

LEMA 5.3. **En las hipótesis con las que trabajamos, se tiene que**

$$diam_{\Omega_N}(fA^\alpha) < c_1(\alpha).$$

Demostración: Como $\partial A^\alpha = \gamma_\alpha \cup \gamma_{\mu/\alpha}$, el lema 4.4 (que se probará sin usar ningún resultado de aquí) implica que

$$fA^\alpha \subset \overline{Int\,f\gamma_\alpha} \cup \overline{Int\,f\gamma_{\mu/\alpha}}.$$

Como fA^α es conexo, o bien $\overline{Int\,f\gamma_\alpha} \cap \overline{Int\,f\gamma_{\mu/\alpha}} \neq \emptyset$ o bien fA^α está contenido en uno de ellos. En cualquiera de los dos casos,

$$diam_{\Omega_N}(fA^\alpha) \leq diam_{\Omega_N}(\overline{Int\,f\gamma_\alpha}) + diam_{\Omega_N}(\overline{Int\,f\gamma_{\mu/\alpha}}).$$

Ahora puede aplicarse el lema 5.2 para obtener

$$diam_{\Omega_N}(fA^\alpha) < \frac{1}{2}L_{\Omega_N}(f\gamma_\alpha) + \frac{1}{2}L_{\Omega_N}(f\gamma_{\mu/\alpha}),$$

y usar (4.2) para conseguir

$$diam_{\Omega_N}(fA^\alpha) < c_1(\alpha). \qquad \#L5.3.$$

LEMA 5.4. **Sea S una superficie de Riemann con una puntura a, y sea C^r el collar alrededor de a de área r^{-1}. Entonces, si σ es una curva cerrada que rodea a y $L_S(\gamma) \leq L < 2\,Argsenh(1/4)$, se tiene que $\gamma \subset C^r$, con**

$$r > \frac{1}{2\,senh(L/2)} > 2.$$

Demostración: Si γ tiene intersección vacía con C^2, entonces $L_S(\gamma) \geq 1/2$ [Ber]. Como por hipótesis $L_S(\gamma) \leq L < 1/2$, necesariamente γ ha de intersecar a C^2. Esto implica que γ está contenida en C^1, ya que si existiera un punto de γ fuera de C^1 se tendría

$$L_S(\gamma) \geq \int_1^2 \frac{dy}{y} = log\, 2 > \frac{1}{2},$$

lo cual contradice la hipótesis.

Ahora que se sabe que γ está contenida en C^1, puede considerarse una única carta (la usual en $[0,1) \times (1,\infty) \subset U$) para trabajar con ella. Sea $\tilde{\gamma}$ un elevamiento de γ a su recubridor universal U y sea $t \equiv min\,\{Im\, z : z \in \tilde{\gamma}\} \geq 1$. Entonces

$$L \geq L_S(\gamma) = L_U(\tilde{\gamma}) \geq d_U(\,it,\, 1+it\,) \equiv d,$$

donde d verifica

$$tanh(d/2) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \qquad y \qquad senh(d/2) = \frac{1}{2t}.$$

Por tanto

$$senh(L/2) \geq \frac{1}{2t} \qquad y \qquad t \geq \frac{1}{2\, senh(L/2)} > 2. \qquad \#L5.4.$$

Después de todo el trabajo preliminar realizado, la demostración del lema 4.1 está ya muy próxima.

Se distinguen dos casos:

(A) $f\gamma$ es homótopa a cero, donde γ es la curva central de A^α.

Supongamos que existen $i,\, j \in \{0, 1, ..., N+1\}$ tales que

$$d_{\Omega_N}(fA^\alpha, C_k) \leq \frac{1}{4} c_2(t), \qquad \text{para } k = i, j.$$

(4.3) implica que

$$c_2(t) \leq d_{\Omega_N}(C_i, C_j) \leq d_{\Omega_N}(C_i, fA^\alpha) + diam_{\Omega_N}(fA^\alpha) + d_{\Omega_N}(fA^\alpha, C_j).$$

Del lema 5.3 se deduce que

$$c_2(t) < \frac{1}{4} c_2(t) + c_1(\alpha) + \frac{1}{4} c_2(t) = c_2(t),$$

y ya se ha conseguido la contradicción buscada.

(B) $f\gamma$ no es homótopa a cero.

Existe un $j \in \{0, 1, ..., N+1\}$ tal que $f\gamma$ es homótopa a a_j, ya que se ha probado que $f\gamma$ es homótopa a un punto o a una puntura de Ω_N.

(3.2) y (a) nos dan respectivamente

$$L_{\Omega_N}(f\gamma_s) < c_1(\alpha) < 2\,Argsenh(1/4) \qquad \text{para todo } s \in [\alpha, \mu/\alpha].$$

El lema 5.4 asegura que $f\gamma_s$ está contenido en C_j^r para todo $s \in [\alpha, \mu/\alpha]$, luego fA^α está contenido en C_j^r. Por tanto si $i \neq j$ se tiene, en virtud de que los collares de área 1 son disjuntos,

$$d_{\Omega_N}(fA^\alpha, C_i) \geq log\, t = \frac{1}{2}c_2(t) > \frac{1}{4}c_2(t). \qquad \#L4.1.$$

A continuación se prueba el lema 4.2.

LEMA 4.2. **Sean la superficie de Riemann $S \equiv \mathbf{C} - G$, donde G es un cerrado contenido en $\overline{\Delta}_R$ y C^t el collar en S alrededor de la puntura en ∞. Entonces**

$$\{\,|z| \geq Re^{2\pi t}\} \subset C^t.$$

Se necesita un resultado previo.

LEMA 5.5. **Para $j = 1, 2$, sean $\Omega_j \equiv \hat{\mathbf{C}} - G_j$, a un punto aislado de ambos dominios, C_j^t el collar en Ω_j centrado en a y de área t^{-1}. Si $\Omega_2 \subset \Omega_1$, entonces**

$$C_2^t \subset C_1^t \qquad \textbf{para todo } t > 1.$$

Demostración: Como $\Omega_2 \subset \Omega_1$, entonces

$$\int_{\partial C_2^t} \lambda_1(z)\,|dz| \leq \int_{\partial C_2^t} \lambda_2(z)\,|dz| = \frac{1}{t}.$$

Esto quiere decir que ∂C_2^t es una curva que rodea a y que tiene longitud a lo sumo t^{-1} en Ω_1. El lema 1.4 asegura que si $t^{-1} < 2\,Argsenh(1/4) \equiv d^{-1}$, entonces ∂C_2^t está contenido en $C_1^{t_1}$, con

$$t_1 = \frac{1}{2\,senh(1/2t)}.$$

Por tanto

$$C_2^t \subset C_1^{t_1} \qquad \text{con} \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{t}{t_1} = 1.$$

Dado un $t_0 > d$, sea t un número mayor que t_0. Entonces

$$C_2^{t_0} = \{z \in \Omega_2 : d_2(z, C_2^t) \leq log(t/t_0)\}.$$

Si $z \in C_2^{t_0}$, existe una curva γ en Ω_2 que une z con C_2^t y $L_2(\gamma) \leq log(t/t_0)$. Por tanto

$$L_1(\gamma) \leq L_2(\gamma) \leq log\frac{t}{t_0} = log\frac{t_1}{t_1 t_0/t}.$$

Como $C_2^t \subset C_1^{t_1}$, existe un subarco γ_1 de γ que une z con $C_1^{t_1}$, y

$$d_1(z, C_1^{t_1}) \leq L_1(\gamma_1) \leq L_1(\gamma) \leq log\frac{t_1}{t_1 t_0/t},$$

y por tanto,

$$z \in C_1^{t_1 t_0/t} \qquad \text{para todo } t \geq t_0,$$

por lo que $z \in C_1^{t_0}$. Esto da el resultado que se quería para todo $t > d$. Y de aquí se deduce el resultado general, ya que $\lambda_1 \leq \lambda_2$. $\#L5.5.$

Demostrar ahora el lema 4.2 es sencillo. Se usa el lema 5.5 tomando $G_1 = G \cup \{\infty\}$ y $G_2 = \overline{\Delta}_R \cup \{\infty\}$. Basta con observar que $\pi : U \to \Omega_2$, con $\pi(z) = R\,exp(2\pi i z)$, es el recubrimiento universal correspondiente al grupo Γ generado por la transformación $\gamma(z) = z + 1$, y que π aplica biyectivamente la región $[0,1) \times (t, \infty)$ en $\{|z| > Re^{2\pi t}\}$. $\#L4.2.$

LEMA 4.3. **Sean el anillo $A \equiv \{\rho \leq |z - a| \leq \rho k\}$, donde $k \geq 2$, y la curva $\gamma \equiv \{|z - a| = \rho\sqrt{k}\}$. Si g es una función holomorfa en A y tal que $|g(z)| \leq M$ para todo $z \in A$, entonces**

$$diam\,(g\gamma) < \frac{24\pi M}{\sqrt{k}}.$$

Demostración: La función $h(z) \equiv f(\rho z + a)$ es holomorfa en la región $\{1 \leq |z| \leq k\}$. Por tanto,

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=k}\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,$$

y

$$h'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=k}\frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta.$$

Entonces, si $|z| = k$,

$$|h'(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi k M}{(k - \sqrt{k})^2} + \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi M}{(\sqrt{k} - 1)^2} \leq \frac{24 M}{k}.$$

Si $|z| = \sqrt{k}$, entonces $w = \rho z + a$ está en la curva γ, y $g'(w) = h'(z)\rho^{-1}$.

Por tanto,

$$|g'(w)| \leq \frac{24\,M}{k\,\rho} \qquad \text{para todo} \quad w \in \gamma,$$

lo cual da $L(g\gamma) < \frac{24\,M}{k\,\rho} L(\gamma) = \frac{48\,\pi\,M}{\sqrt{k}}$, que implica la afirmación deseada. $\#L4.3.$

LEMA 4.4. **Sea Λ un dominio plano limitado por $k+1$ curvas de Jordan disjuntas: γ^0 (la exterior), $\gamma^1, ..., \gamma^k$. Sea $g : \overline{\Lambda} \to \mathbf{C}$ analítica. Entonces**

$$g(\Lambda) \subset \cup_{j=0}^{k} Int\, g\gamma^j.$$

Demostración: Considérense las curvas $\gamma^1, ..., \gamma^k$ orientadas en el sentido de giro de las agujas del reloj, y γ^0 orientada en sentido contrario. Entonces se verifica que la suma de las curvas $\gamma^0 + \gamma^1 + ... + \gamma^k$ es homótopa a cero en Λ.

La prueba acabará si se supone que $\sum_0^k n(g\gamma^j, w_0) = 0$, y se ve que $w_0 \notin g(\Lambda)$. Bajo esta hipótesis se tiene que si $B \equiv g^{-1}(w_0)$, entonces

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma g\gamma^j} \frac{dw}{w - w_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma\gamma^j} \frac{g'(z)dz}{g(z) - w_0} = \sum_{z \in B} n(\textstyle\sum_0^k \gamma^j,\, z) = card\,\{\Lambda \cap B\},$$

lo cual implica que g no toma el valor w_0 en Λ. La primera igualdad se tiene por la hipótesis realizada, la segunda es un cambio de variable, la tercera es el principio del argumento, y la cuarta se debe a la orientación elegida para las γ^j. $\#L4.4.$

REFERENCIAS

[A] AHLFORS, L.V., Conformal invariants, McGraw-Hill, New York, 1973.

[A-R] AHLFORS, L.V., ROYDEN, H.L., A counterexample in the classification of open Riemann surfaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. 120 (1952), 5 pp. MR 14, 864.

[A-S] AHLFORS, L.V., SARIO, L., Riemann Surfaces, Princeton University Press, Princeton, 1960.

[Bea] BEARDON, A.F., The Geometry of Discrete Groups, Springer-Verlag, New York, 1983.

[B-P] BEARDON, A.F., POMMERENKE, Ch., The Poincaré metric of a plane domain, J. London Math. Soc. (2) 18 (1978), pp. 475-483.

[Ber] BERS, L., An inequality for Riemann surfaces, Differential geometry and complex analysis. Edited by Chavel-Farkas, H. E. Rauch memorial volume, Springer-Verlag, 1985, pp. 87-93.

[Bu1] BUSER, P., Cubic Graphs and the First Eigenvalue of a Riemann Surface, Math. Z., 162 (1978), pp. 87-99.

[Bu2] BUSER, P., A note on the isoperimetric constant. Ann. Scient. Ec. Norm.Sup. (4) Vol.15 (1982), pp. 213-230.

[Ca1] CARLESON, L., On a class of meromorphic functions and its associated exceptional sets. Thesis. Upsala, 1950.

[Ca2] CARLESON, L., A remark on Picard's theorem, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), pp. 142-144.

[Cha] CHAVEL, I., Eigenvalues in Riemannian Geometry, Academic Press, New York, 1984.

[Che] CHEEGER, J., A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian. "Problems in Analysis", Princeton Univ. Press.,1970, pp. 195-199.

[D] DOYLE, P.G., Random Walk on the Speiser Graph of a Riemann Surface, Bull. Amer. Math. Soc., 11:2 (1984), pp. 371-377.

[D-S] DOYLE, P.G., SNELL, J.L., Random Walks and Electric Networks, Carus Mathematical Monographs, M.A.A., 1984.

[E] EPSTEIN, C.L., Positive Harmonic Functions on Abelian Covers, Journal of Functional Analysis, 82 (1989), pp. 303-315.

[Fe1] FERNANDEZ, J.L., On the existence of Green's Function in Riemannian Manifolds, Proc. Amer. Math. Soc., 96 (1986), pp. 284-286.

[Fe2] FERNANDEZ, J.L., Singularities of Inner Functions, Math. Z. 193, (1986), pp. 393-396.

[Fe3] FERNANDEZ, J.L., Domains with strong barrier. Revista Matemática Iberoamericana, 5 (1989), pp. 47-65.

[F-R1] FERNANDEZ, J.L., RODRIGUEZ, J.M., The exponent of convergence of Riemann surfaces. Bass Riemann surfaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. 15 (1990), pp. 165-183.

[F-R2] FERNANDEZ, J.L., RODRIGUEZ, J.M., Area growth and Green's function of Riemann surfaces, Arkiv för matematik (por aparecer).

[Fi] FISHER, S., Function theory on planar domains, Ed. John Wiley Sons, 1983.

[Fo] FORSTER, O., Lectures on Riemann surfaces, Ed. Springer-Verlag, 1977.

[G] GONZALEZ, M.J., Uniformly perfect sets, Green's function and fundamental domains. Thesis. Yale University, 1991.

[Kac] KAC, M., Can one hear the shape of a drum?, Amer. Math. Monthly 73 (1966), pp. 1-23.

[Kan] KANAI, M., Rough isometries and the parabolicity of riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan, 38:2 (1986), pp. 227-238.

[Kar] KARP, L., Subharmonic Functions, Harmonic Mappings and Isometric Immersions, Seminar on Differential Geometry, Ed. S.-T. Yau, Annals of Mathematics Studies, Princeton U.P., 1982, pp. 133-142.

[Ko] KOBAYASHI, S., Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings, Marcel Dekker, Inc., New York, 1970.

[Kr] KRA, I., Automorphic Forms and Kleinian Groups, Benjamin, Reading, 1972.

[Ku] KURATOWSKI, K., Introduction to set theory and topology. PWN-Polish Scient. Publ.-Warszawa. 1977.

[L-S] LYONS, T., SULLIVAN, D., Function Theory, Random Paths and Covering Spaces, J. Diff. Geom., 19 (1984), pp. 299-323.

[L] LYONS, T., Instability of the Liouville property for quasi-isometric Riemannian manifolds and reversible Markov chains, J. Diff. Geom. 26 (1987), pp. 33-36.

[Mas] MASSEY, W., Introducción a la topología algebraica, Ed. Reverté, Barcelona, 1972.

[Mat] MATSUMOTO, K., Exceptional values of meromorphic functions in a neighborhood of the set of singularities, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A 24 (1960), pp. 143-153.

[Mi] MINDA, D., Bloch and Normal functions in General Planar domains, Holomorphic functions and Moduli I, Ed. D. Drasin, Springer-Verlag, 1988, pp. 101-110.

[N1] NICHOLLS, P.J., Fundamental Regions and the Type Problem for a Riemann Surface, Math. Z., 174 (1980), pp. 187-196.

[N2] NICHOLLS, P.J., The Ergodic Theory of Discrete Groups, London Math. Soc. Lecture Note Series 143, Cambridge University Press, 1989.

[O] OSGOOD, B.G., Some properties of f''/f' and the Poincaré metric, Indiana U. Math. Jour. Vol. 31, No. 4 (1982), pp. 449-461.

[Pa] PATTERSON, S.J., Some examples of Fuchsian groups, Proc. London Math. Soc. (3), 39 (1979), pp. 276-298.

[Pf] PFLUGER, A., Sur un propriété de l'application quasi-conforme d'une surface de Riemann ouverte. Compte Rendus Acad. Sci. Paris, 227, 5 Juillet 1948, pp. 25-26.

[Po1] POMMERENKE, Ch., Uniformly perfect sets and the Poincaré metric, Arch. Math., 32 (1979), pp. 192-199.

[Po2] POMMERENKE, Ch., On Fuchsian Groups of Accessible Type, Ann. Acad. Sci. Fenn., 7 (1982), pp. 249-258.

[Po3] POMMERENKE, Ch., On uniformly perfect sets and Fuchsian groups, Analysis 4, (1984), pp. 299-321.

[Ro1] ROYDEN, H.L., Some remarks on open Riemann surfaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I. 85 (1951).

[Ro2] ROYDEN, H.L., A property of quasi-conformal mapping. Proc. Am. Math. Soc. 5 (1954), pp. 266-269.

[Ro3] ROYDEN, H.L., The Picard theorem for Riemann surfaces, Proc. Am. Math. Soc. 90 (1984), pp. 571-574.

[Sh] SHIGA, H., On the boundary behavior of holomorphic mappings of plane domains to Riemann surfaces.

[Sul1] SULLIVAN, D., On the Ergodic Theory at infinity of an arbitrary Discrete Group of Hyperbolic Motions, Riemann Surfaces and Related Topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference, Ed. I.Kra and B.Maskit, Annals of Mathematics Studies, Princeton U.P., 1981, pp. 465-496.

[Sul2] SULLIVAN, D., Related aspects of positivity in Riemannian Geometry, J. Diff. Geom. 25 (1987), pp. 327-351.

[Suz] SUZUKI, M., Comportement des applications holomorphes autour d'un ensemble polaire, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 304, Série I, 8 (1987), pp. 191-194

[Top] TOPPILA, S., On exceptional values of functions meromorphic outside a linear set, Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I. 5 (1980), pp. 115-119.

[Tok1] TOKI, Y., On the classification of open Riemann surfaces. Osaka Math. J. 4 (1952), pp. 191-201. MR 14, 864..

[Tok2] TOKI, Y., On the examples in the classification of open Riemann surfaces. Osaka Math. J. 5 (1953), pp. 267-280. MR 15, 519.

[Ts] TSUJI, M., Potential theory in modern function theory, Maruzen, Tokyo, 1959.

[Va1] VAROPOULOS, N.Th., Potential Theory and diffusion on Riemannian manifolds, Conference in Harmonic Analysis in Honor of Anthony Zygmund, Wadsworth, Belmont, California 1983.

[Va2] VAROPOULOS, N.Th., Information theory and harmonic functions, Bull. Sc. math., 2 série, 110 (1986), pp. 347-389.

[Va3] VAROPOULOS, N.Th., Small time Gaussian estimates of heat diffusion kernels. Part I: The semigroup technique, Bull. Sc. Math., 113 (1989), pp. 253-277.

[Vi] VIRTANEN, K.I., Über die Existenz von beschränkten harmonischen Funktionen auf offenen Riemannschen Flächen, Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I. 75 (1950).

Reunido el Tribunal que suscribe en el día de la fecha, acordó calificar la presente Tesis Doctoral con la censura de APTO CUM LAUDE

Madrid, 30 de Septiembre de 1991

El presidente

Vocal

Vocal

Vocal

El Secretario

Joan Josep Carmona

Daniel Pascual